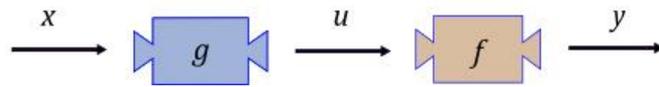
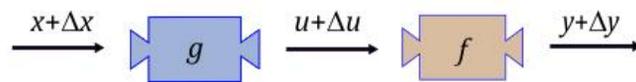

Dérivation des fonctions composées

On vient de voir que la dérivée de $\sin(3x)$ est $3\cos(3x)$, mais quelle serait la dérivée de $\sin(x^3)$? Plus généralement, comment peut-on calculer la dérivée de $f(g(x))$?

Si $y = f(g(x))$, on peut introduire une variable intermédiaire u et dire que $y = f(u)$ où $u = g(x)$:



Un accroissement Δx de x entraîne un accroissement de u et donc de y :



Si f et g sont dérivables, d'après l'approximation affine (ou linéaire), on a

$$\Delta y \approx f'(u)\Delta u, \Delta u \approx g'(x)\Delta x \Rightarrow \Delta y \approx f'(u)g'(x)\Delta x$$

et donc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

On peut montrer qu'en prenant la limite $\Delta x \rightarrow 0$ on a bien

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Puisqu'on peut écrire $f'(u) = \frac{dy}{du}$ et $g'(x) = \frac{du}{dx}$, certains préfèrent utiliser la notation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

qui est facile à retenir.

Donc si $y = \sin(x^3)$, écrivons $y = \sin(u)$ où $u = x^3$ et on aura $\frac{dy}{du} = \cos(u)$, $\frac{du}{dx} = 3x^2$, d'où

$$\frac{dy}{dx} = \cos(u)3x^2 = \cos(x^3)3x^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx} \sin(x^3) = \cos(x^3)3x^2.$$