Ensembles

Ensembles

Un ensemble A est une collection d'objets qui sont appelés les éléments de l'ensemble. Si x est un élément de l'ensemble A, on dit que x appartient à A et on utilise la notation $x \in A$. On utilise aussi la notation $y \notin A$ pour indiquer que y n'est pas un élément de A.

Les ensembles que nous considérerons sont des ensembles qui ont pour éléments des nombres réels, comme par exemple les intervalles. On retrouve souvent les ensembles qui figurent dans le tableau suivant :

Ensembles de nombres	
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels : 0, 1, 2, 3, 4, ...
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs : 0, ±1, ±2, ±3, ±4, ...
$\mathbb{Q}$	Ensemble des nombres rationnels, c.-à-d. des nombres qui peuvent s'écrire comme une fraction.
$\mathbb{R}$	Ensemble de tous les nombres réels.

On rencontre aussi un ensemble qui ne contient aucun élément : l'ensemble vide $\varnothing$.

On peut spécifier un ensemble en donnant la liste de ses éléments, comme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

ou en donnant une propriété qui permet de déterminer si un nombre est dans l'ensemble ou pas, comme

$$]a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } a < x \leq b\},$$

qu'on écrit aussi souvent

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

Algèbre des ensembles

Deux ensembles A et B sont dits égaux s'ils ont les mêmes éléments : $A = B$. Si ce n'est pas le cas, ils sont différents : $A \neq B$. On dit que A est contenu dans B ou que B contient A si tous les éléments de A sont éléments de B. Dans ce cas, on dit aussi que A est un sous-ensemble ou une partie de B. Cela est noté $A \subset B$ ou $B \supset A$.

Si on a deux ensembles A et B, on peut considérer l'ensemble formé des éléments qu'ils ont en commun, qui s'appelle leur intersection :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Par exemple

$$\{1, 2, 3, 4, 6\} \cap \{2, 4, 7, 8\} = \{2, 4\}$$

et

$$[1, 4] \cap]2, 6[=]2, 4] .$$

On peut aussi considérer leur union, qui est l'ensemble formé des éléments qui sont dans l'un ou dans l'autre (possiblement dans les deux) :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} .$$

Par exemple

$$\{1, 2, 3, 4, 6\} \cup \{2, 4, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$$

et

$$[1, 4] \cup]2, 6[= [1, 6[.$$

Finalement, la différence de deux ensembles A et B, notée A-B ou $A \backslash B$, selon les livres, est l'ensemble formé des éléments de A qui ne sont pas dans B :

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} .$$

Par exemple

$$\{1, 2, 3, 4, 6\} - \{2, 4, 7, 8\} = \{1, 3, 6\}$$

et

$$[1, 4] -]2, 6[= [1, 2] .$$

Autres notations

Vous rencontrerez peut-être aussi d'autres symboles, comme $\forall$ ou $\exists$ ou des abréviations comme « t.q. » ou « ssi ». Ils ont la signification suivante :

$\forall$	« pour tout(e) »	t.q.	« tel(le) que »
$\exists$	« il existe »	ssi	« si et seulement si »

Par exemple, « $\forall x \in \mathbb{N}$, $\exists y \in \mathbb{N}$ t.q. $y = x^2$ » signifie que « pour tout entier naturel x, il existe un entier naturel y tel que y soit le carré de x » et « $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{N}$ ssi $x \geq 0$ » signifie que « tout entier relatif x est un entier naturel si et seulement si il est supérieur ou égal à zéro ».