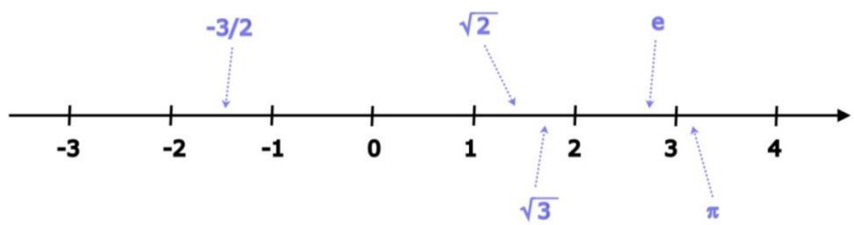
# Droite réelle, intervalles et inégalités

## La droite réelle




Les nombres réels peuvent être identifiés avec les points situés sur une droite. La pointe de flèche, à droite, indique que c'est de ce côté de l'origine (c.-à-d. du point associé au nombre zéro) que sont les nombres positifs.

## Intervalles bornés

Un intervalle borné est l'ensemble des nombres réels $x$ situés entre deux nombres réels donnés $a$ et $b$, appelés les extrémités de l'intervalle. Étant donné que chacune des extrémités peut faire partie ou ne pas faire partie de l'intervalle, il y a quatre possibilités représentées dans le tableau suivant :

| **Intervalles bornés** | | |
|---|---|---|
| Valeurs de $x$ | Notation | Représentation graphique |
| $a < x < b$ | $]a, b[$ |  |
| $a \leq x \leq b$ | $[a, b]$ |  |
| $a < x \leq b$ | $]a, b]$ |  |
| $a \leq x < b$ | $[a, b[$ |  |

Remarquez que dans la notation, on utilise des crochets carrés. Quand une extrémité fait partie de l'intervalle, le crochet correspondant pointe vers le dedans. Dans le cas contraire, le crochet pointe vers le dehors.

Dans la représentation graphique, on utilise des petites boules pour indiquer les extrémités. La boule est pleine si l'extrémité est dans l'intervalle, elle est vide si l'extrémité est en dehors.

Si une extrémité fait partie d'un intervalle $I$, on dit que $I$ est fermé à cette extrémité. Si elle ne fait pas partie de $I$, on dit que $I$ est ouvert à cette extrémité. Si $I$ est fermé ou ouvert aux deux extrémités, on dit tout simplement qu'il est fermé ou qu'il est ouvert.

## Intervalles non bornés

Un <u>intervalle non borné</u> est l'ensemble des nombres réels $x$ situés sur la droite réelle à gauche ou à droite d'un nombre réel donné. Un tel intervalle a donc une seule extrémité qui peut faire partie ou ne pas faire partie de l'intervalle; les valeurs de $x$ s'étendent jusqu'à plus ou moins l'infini ($\infty$ ou $-\infty$). De nouveau, il y a quatre possibilités représentées dans le tableau suivant :

| **Intervalles non bornés** | | |
|---|---|---|
| Valeurs de $x$ | Notation | Représentation graphique |
| $a < x$ | $]a, \infty[$ |  |
| $a \leq x$ | $[a, \infty[$ |  |
| $x < b$ | $]-\infty, b[$ |  |
| $x \leq b$ | $]-\infty, b]$ |  |

À noter qu'à $\pm\infty$, c'est l'usage de faire pointer le crochet vers le dehors. (Pour s'en souvenir, on peut se dire que $\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres et ne peuvent donc pas faire partie de l'intervalle.)

## Inégalités

Les inégalités jouent un rôle très important dans les cours de calcul. Il est donc impératif de savoir les manipuler avec facilité. Leurs principales propriétés sont exposées dans le tableau suivant :

| **Propriétés des inégalités** | |
|---|---|
| Propriété | Exemple |
| Si $a < b$ et si $b < c$, alors $a < c$. | $-1 < 2$ et $2 < 5$, donc $-1 < 5$. |
| Si $a < b$, alors $a+c < b+c$. | $3 < 8$, donc $6 < 11$ et $-1 < 4$ ($c = 3$ ou $-4$). |
| Si $a < b$ et si $c > 0$, alors $ac < bc$. | $5 < 7$, donc $10 < 14$ ($c = 2$). |
| Si $a < b$ et si $c < 0$, alors $ac > bc$. | $5 < 7$, donc $-10 > -14$ ($c = -2$). |
| Si $0 < a < b$, alors $1/a > 1/b$. | $2 < 3$, donc $1/2 > 1/3$. |

Des énoncés analogues sont vrais avec $a < b$ remplacé par $a \leq b$ (et $b < c$ remplacé par $b \leq c$ pour le premier énoncé).

## Exemples

Exemple 1 : Résoudre $-7 < 2x+3 < 11$

Réponse : $-7 < 2x+3 < 11 \Leftrightarrow -7-3 < 2x < 11-3 \Leftrightarrow -10 < 2x < 8 \Leftrightarrow -10/2 < x < 8/2 \Leftrightarrow -5 < x < 4$.

On dit que l'ensemble solution est l'intervalle ]-5, 4[.

Exemple 2 : Résoudre $5-4x \geq 13$

Réponse : $5-4x \geq 13 \Leftrightarrow -4x \geq 13-5 \Leftrightarrow -4x \geq 8 \Leftrightarrow x \leq 8/(-4) \Leftrightarrow x \leq -2$.

L'ensemble solution est donc l'intervalle ]-∞, -2[.