

# Valeurs absolues

## La valeur absolue d'un nombre

On sait bien sûr que la valeur absolue de 7 est 7 et que celle de -3 est 3, mais comment peut-on définir la valeur absolue d'un nombre réel quelconque  $a$  ?

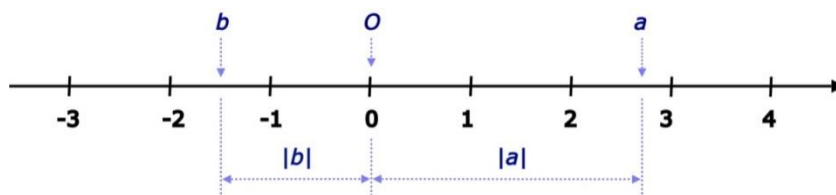
Pour cela, remarquons que si  $a$  est positif, on a  $a = |a|$ . Par contre, si  $a$  est négatif, on a  $a = -|a|$ , et donc  $|a| = -a$  ! Ceci conduit à la définition suivante :

**Définition.** La valeur absolue d'un nombre  $a$  est le nombre  $|a|$  défini par

$$\begin{cases} |a| = a & \text{si } a \geq 0, \\ |a| = -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Exemple :  $|-3| = -(-3) = 3$ .

On peut aussi visualiser la valeur absolue d'un nombre comme la distance sur la droite réelle entre le point représentatif du nombre et l'origine  $O$ .



## Propriétés des valeurs absolues

Les valeurs absolues ont les propriétés suivantes :

Propriétés des valeurs absolues	
Propriété	Exemple
$ -a  =  a $ .	$ -7  =  7  = 7$ .
$ ab  =  a  b $ .	$ -3 \times 7  =  -3  7  = 21$ .
$ a/b  =  a / b $ (si $b \neq 0$ ).	$ -8/2  =  -8 / 2  = 4$ .
$ a^n  =  a ^n$ .	$ -125  =  (-5)^3  =  -5 ^3 = 5^3 = 125$ .
$ a+b  \leq  a + b $ .	$4 =  4  =  7+(-3)  \leq  7 + -3  = 7+3 = 10$ .

La proposition suivante est souvent très utile :

**Proposition.** Si  $a > 0$ , alors

1)  $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a.$

2)  $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$

3)  $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ ou } x > a.$

## Exemples

Exemple 1 : Calculer  $\frac{|7-12|}{|-3+5|}$ .

Réponse :  $\frac{|7-12|}{|-3+5|} = \frac{|-5|}{|2|} = \frac{5}{2}$ .

Exemple 2 : Résoudre  $|2x+3| \leq 9$

Réponse :  $|2x+3| \leq 9 \Leftrightarrow -9 \leq 2x+3 \leq 9 \Leftrightarrow -12 \leq 2x \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 3.$

L'ensemble solution est donc l'intervalle  $[-6, 3]$ .