Introduction à la preuve par l'absurde

Initiation à la logique

Une partie importante du travail du mathématicien consiste à faire des preuves, c'est-à-dire à démontrer des propositions mathématiques. Une proposition mathématique est le plus souvent de la forme « Si A est vrai alors B est vrai » qu'on peut écrire « $A \Rightarrow B$ ». A est l'hypothèse et B est la conclusion.

Un exemple de proposition mathématique serait « Si $x = \sqrt{2}$ alors x est irrationnel ».

Pour démontrer cette proposition on doit utiliser l'hypothèse (qu'on suppose vraie) et en déduire la conclusion, en s'aidant au besoin de propositions déjà démontrées (des théorèmes) ou simplement reconnues comme vraies (des axiomes ou des postulats).

Par ailleurs, il est important de noter une différence importante entre l'hypothèse et la conclusion dans une proposition mathématique car un même énoncé peut faire partie de la conclusion dans une proposition et faire partie de l'hypothèse dans une autre. Prenons par exemple l'énoncé suivant : « AB est la bissectrice de l'angle A ».

a) Si l'énoncé est dans l'hypothèse de votre proposition, il est simplement pris pour acquis sans avoir à être démontré ou justifié. C'est exactement ce que ça veut dire être une hypothèse : on suppose simplement que c'est vrai.
b) Si l'énoncé fait partie de la conclusion, la situation est complètement différente : vous devez en faire la démonstration, c'est-à-dire que vous devez le justifier correctement en utilisant des résultats déjà connus. Plus simplement, vous devez dire et expliquer pourquoi AB est effectivement la bissectrice de l'angle A.

Démontrer une proposition c'est ***dire pourquoi*** la proposition est vraie

Pour faire une preuve par l'absurde, nous avons besoin du concept de la négation d'un énoncé.

La négation : La négation d'un énoncé est un nouvel énoncé qui dit le contraire de l'énoncé initial. Par exemple :

Énoncé initial : Dans un carré, les diagonales se coupent en leur milieu.
Négation : Dans un carré, les diagonales ne se coupent pas en leur milieu.

Il est important de réaliser que si un énoncé est vrai, sa négation est forcément fausse, alors que si un énoncé est faux, sa négation est forcément vraie. L'énoncé et sa négation ont des valeurs de vérité contraire. Dans l'exemple ci haut, l'énoncé initial est vrai et sa négation est fausse.

Preuve par l'absurde

Si on se donne un énoncé et sa négation, on sait que l'un des deux est vrai et l'autre faux. Si on peut montrer qu'il est impossible pour l'un de ces deux d'être vrai, alors on sait que l'autre doit être vrai. Dans une preuve par l'absurde, on utilise comme hypothèse la négation de la conclusion (c'est **l'hypothèse de contradiction**). On montre que ça nous mène à une contradiction (impossibilité que la négation de la conclusion soit vraie), donc on en déduit que la conclusion cherchée est vraie.

Proposition : $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel

Hypothèse (qu'on suppose vraie) : $x = \sqrt{2}$
Conclusion (qu'on doit démontrer) : x est un nombre irrationnel
Autrement dit : $x = \sqrt{2} \Rightarrow x$ est irrationnel.

Préliminaires

Avant de faire la démonstration, quelques préliminaires s'imposent

1. Un nombre rationnel est un nombre qui s'écrit sous forme de quotient de deux nombres entiers, le dénominateur étant non nul. Les nombres rationnels sont donc des fractions et si x est rationnel, il existe deux entiers a et b ($b \neq 0$) tels que $x = \frac{a}{b}$
2. Un nombre irrationnel est un nombre qui n'est pas rationnel.
3. Lorsque les entiers a et b ont des facteurs communs, on peut simplifier la fraction $\frac{a}{b}$. On peut toujours simplifier jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de facteurs premiers entre a et b, on a alors une fraction simplifiée.
4. Par exemple $\frac{60}{75} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5}{3 \times 5 \times 5} = \frac{2 \times 2}{5} = \frac{4}{5}$. La fraction $\frac{4}{5}$ est simplifiée. Puisque les nombres entiers s'écrivent comme un produit fini de nombres premiers, un nombre fini de simplifications suffisent à simplifier complètement une fraction. Il est donc toujours possible, pour chaque nombre rationnel, de l'écrire comme une fraction simplifiée.
5. Ainsi, si une fraction est simplifiée, il est clair que le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteurs communs, en particulier ils ne peuvent pas tous deux être pairs.

Preuve de la proposition $x = \sqrt{2} \Rightarrow x$ est irrationnel

On fait une preuve par l'absurde, c'est-à-dire qu'on accepte notre hypothèse mais qu'on suppose que la conclusion est fausse (hypothèse de contradiction).
Hypothèse de contradiction : x est rationnel.

On suppose donc que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ et on peut toujours supposer que la fraction est simplifiée.

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2$. Donc a^2 est un nombre pair. Puisque le carré d'un nombre impair est toujours impair, a^2 est pair entraîne que a est pair.

Donc, il existe un entier r tel que $a = 2r$.

On a donc $2b^2 = a^2 = (2r)^2 = 4r^2 \Rightarrow b^2 = 2r^2$.

Donc, b^2 est pair et ainsi b est pair.

Maintenant, on a une fraction simplifiée $\frac{a}{b}$ dont le numérateur et le dénominateur sont tous deux pairs. C'est absurde (contradiction).

Ainsi, l'hypothèse de contradiction nous mène à une contradiction, elle doit être fausse. Donc, « $\sqrt{2}$ est rationnel » est faux, on peut conclure que $\sqrt{2}$ est irrationnel.