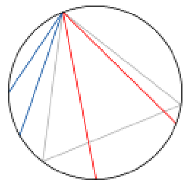
Le paradoxe de Bertrand

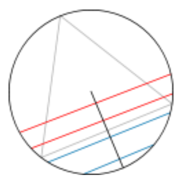
Soit un cercle de rayon 1. Le côté d'un triangle équilatéral inscrit dans ce cercle a pour longueur $\sqrt{3}$. Le paradoxe de Bertrand consiste à déterminer la probabilité qu'une corde du cercle, choisie au hasard, possède une longueur supérieure à $\sqrt{3}$.

- **1re méthode de calcul**



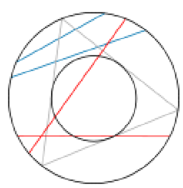
Extrémités aléatoires : soit un point de la circonférence du cercle et le triangle équilatéral inscrit dont l'un des sommets est ce point. On choisit aléatoirement un autre point sur le cercle et on considère la corde reliant les deux points. Elle est plus longue que le côté du triangle si le deuxième point est situé sur l'arc reliant les deux sommets du triangle opposé au premier point. La probabilité est donc alors 1/3.

- **2e méthode de calcul**



Rayon aléatoire : on choisit un rayon du cercle et on considère le triangle équilatéral inscrit dont un côté est perpendiculaire au rayon. On choisit aléatoirement un point sur le rayon et on trace la corde dont il est le milieu. Cette corde est plus longue que le côté du triangle si le point est situé entre le centre du cercle et l'intersection du côté avec le rayon, laquelle est située au milieu de ce dernier. La probabilité est donc alors 1/2.

- **3e méthode de calcul**



Milieu aléatoire : soit un point choisi aléatoirement à l'intérieur du cercle et une corde dont il est le milieu. La corde est plus longue qu'un côté du triangle équilatéral inscrit si le point est situé à l'intérieur d'un cercle concentrique de rayon 1/2. L'aire de ce cercle est un quart de celle du grand cercle. La probabilité est donc alors 1/4.

Le paradoxe : trois méthodes différentes donnent trois résultats différents.
Il faut revenir sur la notion de cordes choisies au hasard qui est mal définie. Ou sur la notion de calcul de probabilité dans des ensembles de cardinalité infinie non dénombrables.