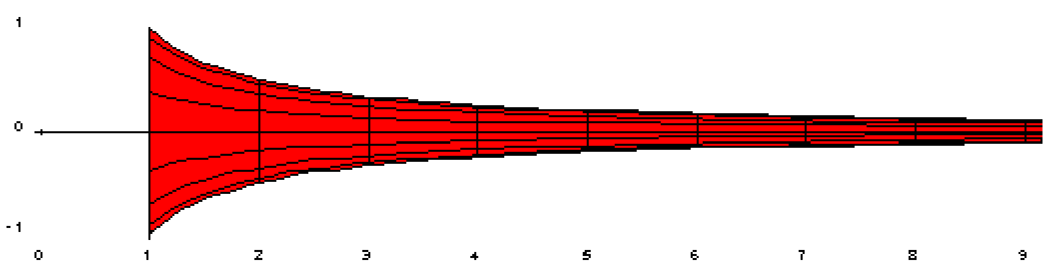
La trompette de Gabriel

Evangelista Torricelli

Physicien et mathématicien Italien du 17e siècle (1608-1647). Il est l'inventeur du baromètre. Précurseur du calcul intégral, Torricelli a la réputation d'un mathématicien rigoureux puisque, à la manière d'Archimède, il utilise une méthode de double contradiction pour démontrer la véracité de ses calculs d'aires et de volume. Peu après l'apparition des coordonnées cartésiennes, il fût l'un des premiers utilisateurs des coordonnées polaires

La trompette de Gabriel

Le trompette de Gabriel est le nom que l'on a donné à un solide défini par Torricelli au 17e siècle. Ce solide à la particularité d'avoir un volume fini et une longueur infinie ce qui était vu comme très paradoxal à l'époque. On y voyait un lien entre l'infini mathématique et le divin, d'où l'expression « trompette de Gabriel », la trompette divine dans laquelle l'archange Gabriel va souffler pour annoncer que l'heure du jugement dernier est venue. Pour ajouter au paradoxe, on sait aujourd'hui que la trompette de Gabrieli a également une surface infinie malgré son volume fini. Il est donc possible de la remplir avec une quantité finie de peinture mais pas de la peindre.



La trompette de Gabriel est obtenue en faisant tourner une partie de l'hyperbole d'équation $y = 1/x$ autour d'une de ses asymptotes.

Toricelli en fait travaille avec une trompette munie d'un bouchon pour simplifier son raisonnement. Il considère la portion d'hyperbole pour $1 \leq x < \propto$ qu'il fait tourner autour de l'axe des x et il ajoute pour $0 \leq x \leq 1$ un cylindre de hauteur 1 et de rayon 1 dont le volume est égal à π.

Ensuite il décompose le solide en une somme d'indivisibles en formes de tubes concentriques infiniment minces. (Il anticipe ainsi la méthode des coquilles cylindriques que les étudiants modernes étudient souvent dans un premier cours de calcul intégral). Pour $0 \leq y \leq 1$ il considère à la hauteur y le tube de rayon y, de hauteur x et d'épaisseur dy dont le volume est égal à $2\pi xydy$. De manière moderne on dirait que la somme de ces volumes de tubes concentriques est égale à $\int_0^1 2\pi xydy$. Puisque $xy = 1$, on conclut que le volume est égal à 2π. En enlevant le bouchon cylindrique de volume π, il peut conclure que le volume de son solide est égal à π.

Torricelli va terminer son raisonnement en utilisant le principe d'exhaustion (double contradiction) à la manière d'Archimède pour correctement démontrer que ce volume est bien égal à π.

Par contre, si on considère l'aire de la surface de son volume de révolution, le calcul moderne nous dit que cette aire est définie par la formule suivante :

$A = \int_1^{\propto} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} dx = \propto$. Cette aire est donc bien infinie!

Conclusion

Ce paradoxe apparent du solide qu'on peut emplir de peinture mais pas peindre ne devrait pas choquer ceux qui ont fait des intégrales impropres à domaine infini. Une telle intégrale qui converge représente une région du plan que l'on peut peindre avec une quantité finie de peinture mais dont on ne pourrait tracer la frontière avec un pinceau. On retrouve donc une version 2D du paradoxe 3D de Torricelli. Le paradoxe 3D n'est pas plus choquant que le paradoxe 2D et se résout de la même manière en observant que le trait de pinceau du paradoxe 2D a une épaisseur finie alors que la région du plan a une épaisseur qui tend vers 0, tandis que la couche de peinture du paradoxe 3D a une épaisseur finie alors que le solide est coupé par des disques dont le diamètre tend vers 0. On est impressionné par le concept d'infiniment grand qui nous aveugle un peu, mais on ne doit pas oublier les infiniment petits.

Préparé par Paul Deguire.