Les GPS (Système de positionnement global)

Introduction

Le GPS est un appareil qui permet de connaître sa position avec précision, ou encore de connaître l'itinéraire pour aller à un endroit qu'on ne connait pas. Le positionnement se fait à partir de signaux émis par des satellites et reçus par le GPS.

Le GPS est également doté d'une mémoire géographique très précise. Par exemple les GPS commerciaux achetés en Amérique du Nord ont habituellement en mémoire une carte précise du Canada, des États-Unis et du Mexique.

Le GPS est donc une espèce de calculatrice équipée d'une horloge, d'un récepteur et d'une mémoire géographique.

Si on veut simplifier, on peut dire que pour connaître la position d'un point sur la surface de la Terre, il suffit de connaître la distance entre ce point et trois satellites. Connaître la distance à un satellite signifie qu'on se trouve sur une sphère centrée sur ce satellite. Connaître la distance à deux satellites signifie qu'on se trouve sur l'intersection de deux sphères, chacune centrée sur un des satellites. Cette intersection est un cercle. Connaître la distance à trois satellites signifie qu'on se retrouve sur l'intersection de trois sphères, chacune centrée sur un des satellites. Cette intersection contient exactement deux points, un seul des deux étant sur la surface de la Terre, l'autre est de l'autre côté du plan des trois satellites, loin dans l'espace.

Comment fonctionne le GPS

Supposons que notre position est le point (x,y,z) et que chaque satellite est à la position (x_i,y_i,z_i) où $i=1,2,3$. Le centre de la Terre est le point (0, 0, 0), l'axe des x passe par l'intersection du méridien 0 et de l'équateur, l'axe OY passe par le point d'intersection du méridien 90 ouest et de l'équateur et l'axe OZ passe par le pôle sud.

La distance entre (x,y,z) et (x_i,y_i,z_i) est

$$d_i = \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2} \qquad (i=1,2,3).$$

Cette distance est aussi égale à $c \times t_i$, pour $i=1,2,3$, ou c est la vitesse de la lumière et t_i est le temps mis par le signal émis par le satellite pour rejoindre le récepteur GPS.

En élevant au carré de chaque côté pour éliminer les radicaux, on a donc un système de trois équations quadratiques :

$$(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2 = c^2 \times t_i^2 \qquad (i=1,2,3).$$

Si on peut résoudre ce système, on connait la position du point (x, y, z)

En réalité, ce serait possible seulement si la durée du trajet des signaux entre les satellites et le récepteur était connue avec précision. Ce serait le cas si le GPS était équipé d'une horloge atomique comme les satellites. Ce n'est pas le cas, sinon les GPS seraient beaucoup trop dispendieux. Il y a donc une erreur τ entre l'horloge du GPS et l'horloge d'un satellite (égale au temps mesuré sur le GPS moins le temps mesuré sur l'horloge du satellite). On peut supposer que les horloges atomiques des satellites sont bien synchronisées et exactes de telle sorte que l'erreur τ soit la même pour chaque satellite.

Soit t_i le temps d'arrivée du message sur l'horloge du satellite moins le temps de départ du signal sur l'horloge du satellite, $i = 1, 2, 3$. (Temps réel inconnu qu'on recherche)

Soit T_i le temps d'arrivée du message sur l'horloge du GPS moins le temps de départ du signal sur l'horloge du satellite. $i = 1, 2, 3$. (Temps fictif calculé et connu)

En fait on vérifie facilement que $t_i = T_i - \tau$

On peut donc réécrire le système d'équations avec $T_i - \tau$ à la place de t_i. Cela pose cependant un problème, on a introduit une nouvelle variable, τ. Pour résoudre ce nouveau problème, on doit ajouter une quatrième équation pour avoir 4 équations et 4 inconnues. Il suffit de recevoir le signal de quatre satellites au lieu de trois. On obtient donc le nouveau système suivant :

$$(x - x_i)^2 = (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = (T_i - \tau)^2 \quad (i = 1, \cdots, 4)$$

C'est un système quadratique, donc difficile à résoudre en principe. Mais pas ici car les termes quadratiques sont les mêmes dans les quatre équations (x^2, y^2, z^2, τ^2) ce qui signifie que si on soustrait deux équations (par exemple équation 1 moins équation 4) on obtient une nouvelle équation qui est linéaire.

Si on soustrait ainsi la 4^e équation de chacune des trois premières, on obtient un système de trois équations linéaires à quatre variables, on sait résoudre ces systèmes. Comme il y a plus de variables que d'équations, il y aura une infinité de solution et on peut les écrire en termes d'une des variables

(par exemple $x = a_1 \times \tau + b_1, y = a_2 \times \tau + b_2, z = a_3 \times \tau + b_3$). Chaque valeur possible donnée à τ donne des valeurs pour les trois autres variables cherchées.

Il suffit ensuite de remplacer x, y, z dans la quatrième équation par ces valeurs en termes de τ pour obtenir une équation quadratique à une seule variable qu'on sait résoudre facilement et qui nous donne la position (x, y, z) cherchée.

Commentaires en conclusion

a) L’équation quadratique a 2 solutions, une seule est sur la surface de la Terre. L’autre est à plusieurs dizaines de milliers de kilomètres dans l’espace.
b) Pour que le système linéaire de 3 équations à 4 inconnues ait une solution du type cherché, il suffit que les 4 satellites ne soient pas dans le même plan.
c) Il y a plusieurs satellites visibles depuis un point sur la Terre en tout moment, bien plus que 4. Le GPS en choisit 4 de manière à minimiser les erreurs de mesure. En fait plus l’angle entre les sphères centrées sur les satellites est grand, plus faible est l’erreur. Ces angles ne sont pas difficiles à calculer.
d) Pour perfectionner le système, on peut minimiser les erreurs en comparant les mesures obtenues à partir des signaux émis par les satellites vers des stations au sol dont la position est parfaitement connue avec les mesures calculées par les stations au sol. C’est le principe du GPS différentiel qui améliore grandement la précision. Il permet notamment de prendre en compte l’effet de l’atmosphère sur les signaux (c est la vitesse de la lumière dans le vide, il y a des distorsions dans l’atmosphère).
e) Le GPS a en mémoire une carte géographique ou les positions sont données en latitude et longitude (coordonnées sphériques) et puisque la Terre n’est pas une sphère parfaite, le passage des coordonnées cartésiennes (calculées par le GPS) aux coordonnées sphériques demande des calculs supplémentaires.
f) La vitesse des satellites, tout comme la masse de la terre, sont assez grandes pour avoir des effets relativistes. Ces effets sont connus et facilement calculables. La vitesse du satellite crée un effet de relativité restreinte qui ralentit l’horloge du satellite. Les positions très différentes dans le champ gravitationnel entre le satellite et la surface de la Terre créent un effet de relativité générale qui accélère l’horloge du satellite. Ces deux effets de signe contraire se compensent partiellement mais pas complètement. La correction est incluse dans le signal émis par le satellite.
g) Le système GPS était à la base un système militaire américain et les signaux étaient délibérément brouillés pour que les utilisateurs civils n’aient pas la même précision que les militaires. Erreur de 100 m plutôt qu’erreur de 5 m par exemple. En 2000 le président américain, Bill Clinton a fait débrouiller ces signaux. Les meilleurs GPS (différentiels, effets relativistes, …) ont une précision de l’ordre de quelques cm.
h) L’Europe, la Russie, La Chine ont développé leurs propres système de positionnement global. Le système Européen en développement, Galileo, est plus moderne que le GPS et très efficace. L’inde et le Japon sont aussi en train de mettre sur pied leurs propres systèmes.

Préparé par Paul Deguire.