Le calcul des séries

Les séries

Les séries sont des sommes infinies. Si on considère la suite $\{a_n\}$, où n = 1, 2, 3, …, la somme des a_n est notée $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$ Par exemple, si $a_n = \frac{1}{2^n}$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$

Il s'agit ici d'une série géométrique et on sait que la somme de la série existe et est égale à 1. Cela paraît bizarre à première vue de parler de la somme d'une série infinie, mais depuis Louis Augustin Cauchy au 19e siècle, on a une idée claire de ce que ça signifie. Essentiellement, notre série a pour somme 1 si les sommes partielles successives de la série $\left(S_M = \sum_{n=1}^{M} a_n \right)$ s'approchent de plus en plus de 1 et que la différence entre ces sommes partielles et 1 devient aussi petite que l'on veut. Plusieurs résultats concernant les séries ont été découverts lors des premières années du calcul différentiel et intégral, notamment au 17e siècle, mais ce n'est qu'au 19e siècle qu'une théorie rigoureuse et satisfaisante des séries a vu le jour.

Si les sommes partielles d'une série s'approchent de plus en plus d'une valeur donnée, aussi près qu'on veut, on dira que la série converge vers cette valeur qui est la somme de la série. Autrement on dit que la série diverge. Elle n'a pas de somme. Cela peut vouloir dire que les sommes partielles augmentent sans arrêt et sans limite (vers l'infini, par exemple $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$) ou que les valeurs des sommes partielles restent finies sans jamais s'approcher d'une valeur donnée qui en serait la somme (par exemple $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, où les sommes partielles oscillent entre les valeurs 0 et -1 sans jamais se rapprocher définitivement d'une ou l'autre de ces valeurs)

Nicolas Oresme

Nicolas Oresme était un évêque français né vers 1320 et décédé le 11 juillet 1382. Il était aussi économiste, mathématicien, physicien, astronome, philosophe, musicologue, théologien et traducteur. Il est considéré comme le penseur le plus original de son siècle en Europe. En mathématique Oresme s'est intéressé à certaines séries qu'on peut fabriquer à partir de séries géométriques. Il a montré comment calculer leur somme. Il a également fourni une preuve très jolie de la divergence de la série harmonique, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dans ce domaine comme ailleurs, Oresme était en avance sur son temps. Sa démonstration de la divergence de la série harmonique est la même que celle qu'on utilise, encore aujourd'hui, dans les cours de calcul différentiel et intégral modernes.

Séries géométriques et séries dérivées

$\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ est appelé la série géométrique de raison a. Cette série est en fait la somme des termes de la progression géométrique de raison a en commençant par a. Une condition nécessaire et suffisante pour que cette série converge est que $|a| < 1$. En ce cas, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$, converge vers $\frac{a}{1-a}$. En particulier, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge vers $\frac{1/2}{1-1/2} = 1$. Oresme connaissait ce résultat. On va l'utiliser pour obtenir la somme de la série suivante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ qui n'est pas une série géométrique. Nous allons procéder à la manière d'Oresme. Il suppose que la série converge et écrit :

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \dots$$

Il décompose sa série en deux séries en retranchant de chaque terme un terme ayant le même dénominateur et avec numérateur égal à 1.

Il obtient :

$$S = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{4}{32} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots\right)$$

Il suffit d'observer que la série dans la première parenthèse est exactement la demi de la série cherchée alors que la série dans la seconde parenthèse est la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ dont Oresme connait la somme qui est égale à 1.Ainsi, il peut écrire : $S = \frac{1}{2}S + 1$. Oresme peut finalement conclure $S = 2$. Donc, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

La série harmonique

Oresme a démontré la divergence de la série harmonique en la comparant à une série qui additionne une infinité de fois le même nombre positif. Une telle série diverge de toute évidence. Pour ce faire, il a développé la série harmonique et il l'a décomposée en morceaux, une infinité de morceaux, dans lesquels la somme des termes est toujours supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$.

Supposons donc $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots$

On a donc, en regroupant les termes

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \ldots$$

Chaque parenthèse contient 2^n termes, tous supérieurs ou égal à $\frac{1}{2^{n+1}}$ pour n = 1, 2, 3, … et donc dans chaque parenthèses la somme est supérieure à $\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$.

On a ainsi : $S > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$ et donc $S = \infty$: la série harmonique diverge.

Et la rigueur ?

Poser *S* égal à la somme d'une série avant de savoir que la série converge, ou décomposer une série en deux séries sont deux choses qui feraient sourciller les mathématiciens modernes. Avant le 19e siècle, le traitement des séries était peu rigoureux et l'utilisation fréquente avec les séries de raisonnements valides avec les sommes finies pouvait poser des problèmes sérieux, voire mener à des paradoxes. Les mathématiciens d'aujourd'hui manipulent les séries avec précaution en suivant des règles strictes qui ont été développées au 19e siècle. Ces règles n'existaient pas au temps d'Oresme, son traitement des séries était intuitif et ingénieux mais peu rigoureux. Cela dit, tout ce qu'Oresme a fait peut être justifié rigoureusement avec les outils modernes. Comme d'autres grands mathématiciens avant et après lui, on peut dire qu'Oresme avait du flair!

Préparé par Paul Deguire.