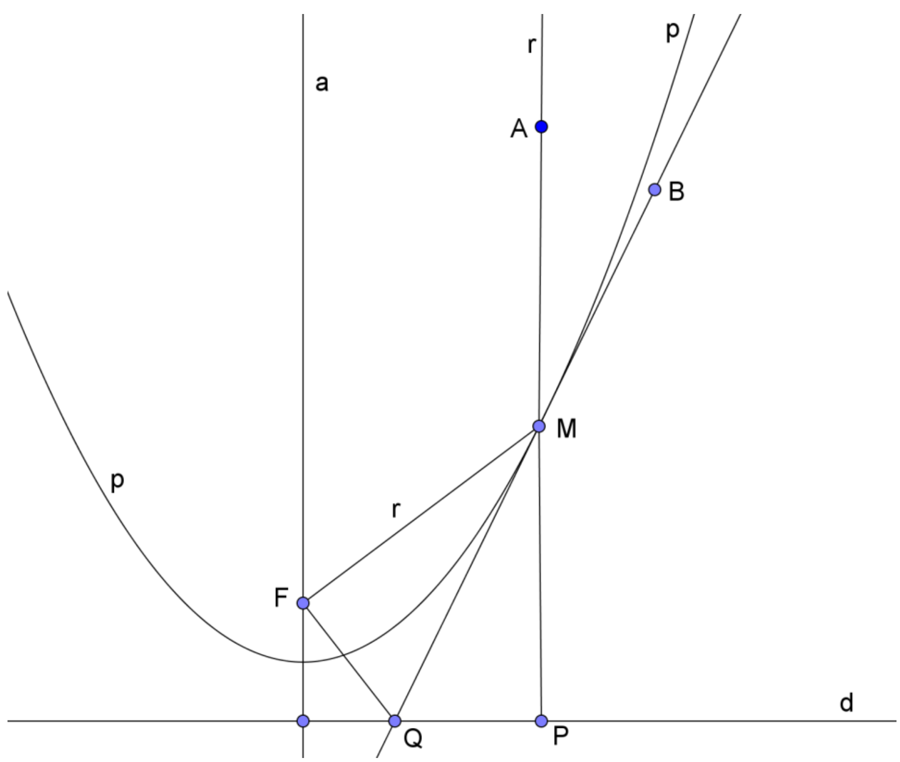
# La propriété remarquable de la parabole

La parabole est le lieu géométrique des points qui sont équidistants d'un point fixe appelé foyer et d'une droite appelée directrice. La droite qui passe par le foyer et qui est perpendiculaire à la directrice, s'appelle l'axe de la parabole.

La parabole jouit d'une propriété remarquable : tout rayon parallèle à l'axe de la parabole, situé du côté de la parabole opposé à la directrice (l'intérieur de la parabole), est redirigé vers le foyer après avoir touché la parabole.

Nous allons illustrer cette propriété en utilisant un cas particulier, la parabole situé dans le plan cartésien dont le foyer est au point (0, 1) et dont la droite d'équation y = -1 est la directrice. Clairement, l'axe des y est l'axe de cette parabole. Cet exemple particulier nous permettra d'utiliser la notion de dérivée et la géométrie analytique pour bien comprendre ce qui se passe géométriquement.

## La parabole




Le diagramme illustre une parabole p, sa droite directrice d, son axe a, QMB la tangente à la parabole au point M, Q l'intersection entre cette tangente et la directrice, AMF un rayon initialement parallèle à l'axe de la parabole, touchant au point M et bifurquant vers le foyer F. P est un point sur la directrice de même abscisse que le point M de la parabole.

Nous voulons montrer que le rayon AM bifurque vraiment vers le foyer F lorsqu'il touche la parabole. Pour ce faire il faut que les angles AMB et FMQ que fait le rayon

avec la parabole (en fait avec sa tangente) soient égaux. Les angles PMQ et AMB étant égaux (opposés par le sommet), il suffit de montrer que les angles FMQ et PMQ sont égaux. Pour ce faire, on va montrer que les triangles FMQ et PMQ sont congrus.
Puisque PM et FM sont congrus, par définition de la parabole, le point M étant à la même distance du foyer (FM) et de la directrice (PM) et que le segment QM est commun aux deux triangles, pour conclure que les triangles FMQ et PMQ sont congrus il suffit de montrer que les autres côtés sont aussi congrus (QF = QP).

## Un peu de calcul différentiel et de géométrie analytique

Nous devons d'abord trouver l'équation de notre parabole de foyer F : (0, 1) et de droite directrice d'équation y = -1.

Supposons que le point M soit de coordonnées (x, y). Nous connaissons les coordonnées du foyer F : (0, 1) et les coordonnées du point P : (x, -1).

Rappel de géométrie (théorème de Pythagore en fait) : la distance entre les points (a, b) et (c, d) est donnée par la formule

dist ((*a, b*), (*c, d*)) = $\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$. Donc la distance carrée entre ces deux points est égale à $(c-a)^2+(d-b)^2$.

Ainsi, la distance carrée entre F et M est égale à $x^2+(y-1)^2$ alors que la distance carrée entre M et P est égale à $(y+1)^2$. Puisque ces distances sont égales (définition de la parabole), on peut écrire : $x^2+(y-1)^2=(y+1)^2$. En simplifiant, on obtient

$$x^2=4y,$$

c'est l'équation de la parabole.

Fixons notre point M maintenant. Supposons que ses coordonnées sont (a, b). Les coordonnées du point P sont donc (a, -1).

L'équation de la parabole peut se mettre sous forme fonctionnelle : $y=\frac{x^2}{4}$

La dérivée $\frac{dy}{dx}$ est donc égale à $\frac{x}{2}$. La pente de la tangente étant donnée par la dérivée, la pente de la tangente QMB est donc égale à $\frac{a}{2}$.

Si le point Q à l'intersection de la tangente et de la directrice est de coordonnée Q : (x, -1), on aura que la pente du segment QM est donnée par $\frac{b+1}{a-x}=\frac{a}{2}\Leftrightarrow x=\frac{a^2-2b-2}{a}=\frac{2b-2}{a}$ car (a, b) sur la parabole signifie $a^2=4b$ (équation de la parabole).

Donc le point Q est de coordonnées Q : $\left(\frac{2b-2}{a}, -1\right)$. On peut donc calculer les distances carrées entre Q et F et entre Q et P facilement. On utilise au besoin l'égalité $a^2 = 4b$.

$$(QF)^2 = \left(\frac{2b-2}{a}\right)^2 + 4 = \frac{4b^2 - 8b + 4 + 4a^2}{a^2} = \frac{4b^2 + 8b + 4}{a^2}$$

$$(QP)^2 = \left(a - \frac{2b-2}{a}\right)^2 = \left(\frac{a^2 - 2b + 2}{a}\right)^2 = \left(\frac{2b+2}{a}\right)^2 = \frac{4b^2 + 8b + 4}{a^2}$$

Ainsi QF et QP sont congrus.

Comme on a vu, cela montre que les triangles PMQ et FMQ sont congrus, ce qui entraîne que les angles PQM et FQM sont congrus et finalement les angles FMQ et AMB sont congrus. Puisque les angles entre le rayon r et la tangente à la parabole sont bien congrus, le rayon r touchant la parabole est effectivement redirigé vers le foyer F.

| Propriété remarquable de la parabole : les rayons parallèles à l'axe de la parabole et intérieurs à la parabole sont redirigés vers le foyer de la parabole lorsqu'ils touchent la parabole. |
|---|

## Les applications de cette propriété remarquable de la parabole

L'application la plus ancienne est la construction des télescopes à miroir parabolique. Un miroir parabolique est en forme de paraboloïde, la figure en trois dimensions obtenue en faisant tourner une parabole autour de son axe. L'axe et le foyer du miroir sont les mêmes que l'axe et le foyer de la parabole. En plaçant un petit miroir secondaire au foyer du miroir principal, on fait ainsi converger tous les rayons entrant dans le télescope vers l'oculaire.

D'autres applications simples sont des variantes du télescope parabolique. Les antennes pour la télévision par satellite sont des soucoupes en forme de paranoïdes et elles réorientent tous les signaux obtenus vers le foyer de la soucoupe où on installe un récepteur. On peut également placer, au foyer d'une telle soucoupe parabolique un micro enregistreur pour capter les sons.

Les phares de voiture utilisent une soucoupe parabolique et une source de lumière située au foyer du phare. Les radiotélescopes et les radars sont d'autres applications de la même propriété remarquable de la parabole.