Calcul des coefficients de Fresnel pour les milieux anisotropes

Bernard M. de Dormale et Georges Bader

On peut calculer des coefficients de Fresnel pour une interface entre deux milieux anisotropes : 1 (à gauche) et 2 (à droite). Comme on a deux vecteurs propres pour chaque sens de propagation dans chacun des milieux, les choses sont un peu plus compliquées que dans le cas isotrope. En reprenant les notations de la section 2 de la page web et en supposant que, comme dans le document précédent, les vecteurs propres 1 et 3 sont des champs « + » et les vecteurs propres 2 et 4 sont des champs « - », on obtient les équations suivantes qui définissent les coefficients de Fresnel : tout d'abord, pour un champ incident venant de la gauche,

$$\begin{aligned}&|1,1> + r_{12,21}\,|1,2> + r_{12,41}\,|1,4> = t_{12,11}\,|2,1> + t_{12,31}\,|2,3>\\&|1,3> + r_{12,23}\,|1,2> + r_{12,43}\,|1,4> = t_{12,13}\,|2,1> + t_{12,33}\,|2,3>\end{aligned}.$$

La première équation suppose un champ incident $|1,1>$ à gauche, la deuxième, un champ $|1,3>$. Dans les deux cas, il n'y a aucun champ incident à droite. Ensuite, on considère les situations où le champ incident vient de la droite seulement :

$$\begin{aligned}&t_{21,22}\,|1,2> + t_{21,42}\,|1,4> = |2,2> + r_{21,12}\,|2,1> + r_{21,32}\,|2,3>\\&t_{21,24}\,|1,2> + t_{21,44}\,|1,4> = |2,4> + r_{21,14}\,|2,1> + r_{21,34}\,|2,3>\end{aligned}.$$

(dans le premier cas on a un champ incident de type 2, dans le second, un champ de type 4).

Il faut être conscient des faits suivants :

1 Lorsqu'on a affaire à des matériaux de type anisotrope, les vecteurs propres seront vraisemblablement déterminés de manière purement numérique. À part la direction de propagation, il n'y a aucune logique dans la numérotation des vecteurs propres.

2 La normalisation des vecteurs propres sera arbitraire et la valeur numérique des coefficients de Fresnel, qui dépend de cette normalisation, le sera aussi.

1. Passage du milieu 1 au milieu 2

Pour résoudre l'équation

$$|1,1> + r_{12,21}\,|1,2> + r_{12,41}\,|1,4> = t_{12,11}\,|2,1> + t_{12,31}\,|2,3>, \tag{1}$$

on commence par la multiplier par les vecteurs $<1,1|$ et $<1,3|$, ce qui donne le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases}1 = <1,1|2,1> t_{12,11} + <1,1|2,3> t_{12,31}\\0 = <1,3|2,1> t_{12,11} + <1,3|2,3> t_{12,31}\end{cases},$$

qui permet de calculer $t_{12,11}$ et $t_{12,31}$:

$$t_{12,11} = \frac{<1,3|2,3>}{D_{12}}, \quad t_{12,31} = \frac{-<1,3|2,1>}{D_{12}},$$

où

$$D_{12} = <1,1|2,1><1,3|2,3> - <1,3|2,1><1,1|2,3>$$

Ensuite, on multiplie (1) par $<1,2|$ et $<1,4|$ pour obtenir

$$\begin{aligned} r_{12,21} &= <1,2|2,1> t_{12,11} + <1,2|2,3> t_{12,31} \\ r_{12,41} &= <1,4|2,1> t_{12,11} + <1,4|2,3> t_{12,31} \end{aligned},$$

ce qui donne $r_{12,21}$ et $r_{12,41}$.

Pour résoudre l'équation

$$|1,3> + r_{12,23}|1,2> + r_{12,43}|1,4> = t_{12,13}|2,1> + t_{12,33}|2,3>, \qquad (2)$$

on commence par la multiplier par les vecteurs $<1,1|$ et $<1,3|$, ce qui donne le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} 0 = <1,1|2,1> t_{12,13} + <1,1|2,3> t_{12,33} \\ 1 = <1,3|2,1> t_{12,13} + <1,3|2,3> t_{12,33} \end{cases},$$

qui permet de calculer $t_{12,13}$ et $t_{12,33}$:

$$t_{12,13} = \frac{-<1,1|2,3>}{D_{12}}, \quad t_{12,33} = \frac{<1,1|2,1>}{D_{12}}.$$

Ensuite, on multiplie (2) par $<1,2|$ et $<1,4|$ pour obtenir

$$\begin{aligned} r_{12,23} &= <1,2|2,1> t_{12,13} + <1,2|2,3> t_{12,33} \\ r_{12,43} &= <1,4|2,1> t_{12,13} + <1,4|2,3> t_{12,33} \end{aligned},$$

ce qui donne $r_{12,23}$ et $r_{12,43}$.

2 Passage du milieu 2 au milieu 1

Pour résoudre l'équation

$$t_{21,22}|1,2> + t_{21,42}|1,4> = |2,2> + r_{21,12}|2,1> + r_{21,32}|2,3> \qquad (3)$$

la méthode la plus simple est de la multiplier par les vecteurs $<2,2|$ et $<2,4|$. Ceci donne le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} <2,2|1,2>t_{21,22} + <2,2|1,4>t_{21,42} = 1 \\ <2,4|1,2>t_{21,22} + <2,4|1,4>t_{21,42} = 0 \end{cases},$$

qui permet de calculer $t_{21,22}$ et $t_{21,42}$:

$$t_{21,22} = \frac{<2,4|1,4>}{D_{21}}, \quad t_{21,42} = \frac{-<2,4|1,2>}{D_{21}}.$$

où

$$D_{21} = <2,2|1,2><2,4|1,4> - <2,4|1,2><2,2|1,4>$$

On multiplie ensuite (3) par $<2,1|$ et $<2,3|$ pour obtenir

$$\begin{array}{c} <2,1|1,2>t_{21,22} + <2,1|1,4>t_{21,42} = r_{21,12} \\ <2,3|1,2>t_{21,22} + <2,3|1,4>t_{21,42} = r_{21,32} \end{array},$$

ce qui donne $r_{21,12}$ et $r_{21,32}$.

De la même manière, pour résoudre l'équation

$$t_{21,24}|1,2> + t_{21,44}|1,4> = |2,4> + r_{21,14}|2,1> + r_{21,34}|2,3> \qquad (4)$$

la méthode la plus simple est de la multiplier par les vecteurs $<2,2|$ et $<2,4|$. Ceci donne le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} <2,2|1,2>t_{21,24} + <2,2|1,4>t_{21,44} = 0 \\ <2,4|1,2>t_{21,24} + <2,4|1,4>t_{21,44} = 1 \end{cases},$$

qui permet de calculer $t_{21,24}$ et $t_{21,44}$:

$$t_{21,24} = \frac{-<2,2|1,4>}{D_{21}}, \quad t_{21,44} = \frac{<2,2|1,2>}{D_{21}}.$$

On multiplie ensuite (4) par $<2,1|$ et $<2,3|$ pour obtenir

$$\begin{array}{c} <2,1|1,2>t_{21,24} + <2,1|1,4>t_{21,44} = r_{21,14} \\ <2,3|1,2>t_{21,24} + <2,3|1,4>t_{21,44} = r_{21,34} \end{array},$$

ce qui donne $r_{21,14}$ et $r_{21,34}$.