La continuité

Continuité

La continuité des fonctions est un concept très important mais souvent négligé. La continuité d'une fonction en un point se définit comme suit :

Définition : Soit *f* une fonction définie au voisinage du point $x = a$. On dit que *f* est continue au point *a* si elle admet une limite en ce point dont la valeur est $f(a)$: $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

On peut aussi définir la continuité d'une fonction sur un intervalle ouvert ou fermé :

Définition : Soit *f* une fonction définie sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. On dit que *f* est continue sur l'intervalle si elle continue en tout point *c* de l'intervalle.

Définition : Soit *f* une fonction définie sur l'intervalle fermé $[a, b]$. On dit que *f* est continue sur l'intervalle si elle est continue en tout point *c* de l'intervalle et si en plus les limites à droite en *a* et à gauche en *b* existent avec $$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ et } \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Si une fonction n'est pas continue en un point, on dit qu'elle est discontinue ou qu'elle présente une discontinuité en ce point-là.

Propriétés de base

Il est clair que les fonctions $y = c$ (c = constante) et $y = x$ sont continues partout. On a en plus les propriétés suivantes : si *f* et *g* sont deux fonctions continues au même point *a* alors les fonctions qui figurent dans le tableau ci-dessous sont elles aussi continues en ce point.

1) $f(x) \pm g(x)$	2) $cf(x)$
3) $f(x)g(x)$	4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ si $g(a) \neq 0$
5) $[f(x)]^n$ (n entier > 0)	6) $\sqrt[n]{f(x)}$ ($f(a) > 0$ si *n* pair)

Comme conséquence directe de ces propriétés, on a la proposition suivante :

Proposition : Soient $P(x)$ et $Q(x)$ des polynômes. $P(x)$ et $Q(x)$ sont continus partout et la fonction $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est continue en tout point où $Q(a) \neq 0$, c.-à-d. partout où elle est définie.

On a également la proposition suivante concernant les fonctions composées :

Proposition : Soit g une fonctions définie au voisinage du point $x = a$ (sauf peut-être au point $x = a$ lui-même) avec $\lim_{x\to a} g(x) = L$. Si f une fonction continue en $x = L$, alors

$$\lim_{x\to a}(f \circ g)(x) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(L)$$

Exemple : On a $\lim_{x\to 2}(x^2 - 3x + 2) = 0$. Puisque $f(x) = e^x$ est une fonction continue, on aura $\lim_{x\to 2} e^{(x^2-3x+2)} = e^0 = 1$.

Fonctions continues sur un intervalle fermé

Il y a deux résultats importants concernant les fonctions continues sur un intervalle fermé. Le premier est le théorème des valeurs intermédiaires :

Proposition : Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle fermé $[a, b]$ avec $f(a) \neq f(b)$. Si L est un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe au moins un point $x = c$ dans l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $f(c) = L$.

Ce théorème a deux applications importantes.

Premièrement, il peut servir à localiser les zéros d'une fonction continue f, c'est-à-dire les valeurs de x où la fonction s'annule. En effet, si on connait deux valeurs de x, a et b, telles que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires, alors le théorème affirme qu'il existe au moins un point $x = c$ entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Exemple : La fonction $f(x) = \cos(x)-x$ s'annule entre 0 et $\pi/2$, puisque elle est continue et que $f(0) = 1 > 0$ et $f(\pi/2) = -\pi/2 < 0$.

Deuxièmement, si on cherche le signe d'une fonction continue sur un intervalle où elle ne s'annule pas, il suffit de vérifier son signe en un seul point de l'intervalle puisque, d'après le théorème, la fonction ne peut pas changer de signe sur cet intervalle.

Le second théorème sera utilisé dans le chapitre où on traite de l'optimisation. Il affirme qu'une fonction continue sur un intervalle fermé atteint toujours son maximum et son minimum :

Proposition : Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle fermé $[a, b]$. Il existe deux valeurs de y, m et M, et deux valeurs de x, c et d, comprises dans l'intervalle telles que

$$m \leq f(x) \leq M$$

pour tous les x dans l'intervalle et

$$f(c) = m \text{ et } f(d) = M.$$

m est appelé le minimum de la fonction sur l'intervalle et M son maximum.