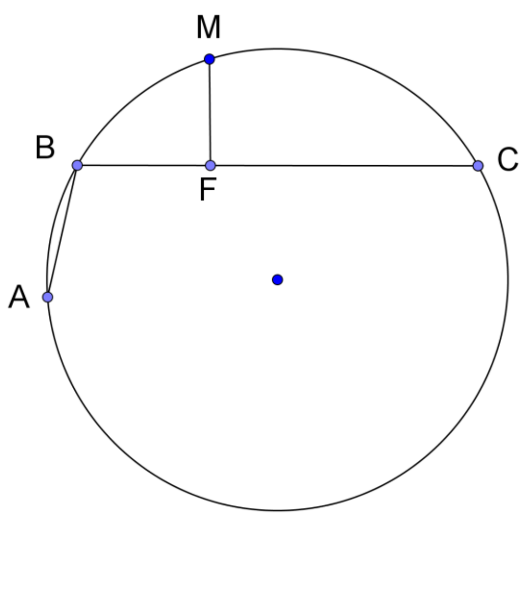
# Le théorème de la corde brisée et la trigonométrie

Les identités trigonométriques élémentaires sont connues depuis plus longtemps que les techniques analytiques, comme par exemple la formule d'Euler – de Moivre, qu'on utilise de nos jours pour les démontrer.  Historiquement, ces formules étaient obtenues à l'aide de raisonnements de géométrie plane élémentaire.

Le théorème de la corde brisée, d'Archimède, est justement un de ses résultats de géométrie plane utile pour montrer des identités trigonométriques.  Nous allons énoncer ce théorème et à l'aide de propositions élémentaires généralement connues, que nous allons énoncer sans démonstration, nous allons le démontrer et en déduire l'identité trigonométrique pour le sinus d'une différence.  La même construction géométrique nous donnera en prime l'identité pour le sinus d'une somme.

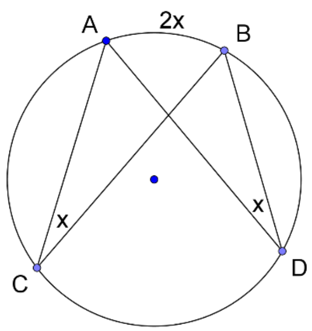
**Théorème de la corde brisée** (Archimède): Si l'arc $\overset{\frown}{ABC}$ est bissecté par le point M, et si F est le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur BC (la plus longue des deux cordes formant la corde brisée ABC), alors F bissecte la corde brisée, autrement dit $\overline{AB} + \overline{BF} = \overline{FC}$.




Pour démontrer le théorème et en déduire l'identité trigonométrique pour le sinus d'une différence, nous faisons appel à des propositions élémentaires de géométrie plane, généralement bien connues, que nous énonçons sans démonstration.

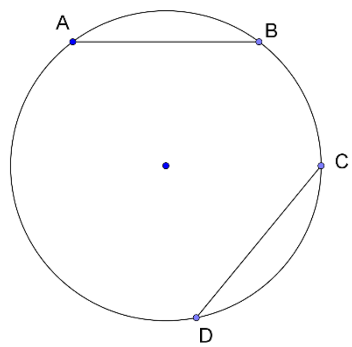
**Proposition 1 :** Le cas de congruence CAC : si deux triangles ont deux paires de côtés congrus et que les angles entre ces deux paires de côtés sont aussi congrus, alors les triangles eux-mêmes sont congrus.

**Proposition 2 :** La mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la demie de la mesure de l'arc qu'il intercepte.




Si l'arc $\overset{\frown}{AB}$ mesure 2x (radians ou degrés) alors tout angle inscrit dans le cercle interceptant l'arc AB mesure x (radians ou degrés). Ainsi les angles ACB et ADB mesurent tous deux x (radians ou degrés)

**Proposition 3 :** Dans un cercle, des arcs congrus sont interceptés par des cordes congrues.

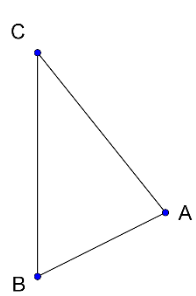



Si $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

Alors

$\overline{AB} = \overline{CD}$

**Proposition 4 :** Dans un triangle ABC, aux plus grands angles sont opposés les plus grands côtés. Autrement dit, si la mesure de l'angle A est plus grande que la mesure de l'angle B, alors le côté BC, opposé à l'angle A, est plus long que le côté AB, opposé à l'angle C.




Si l'angle A est plus grand que l'angle C

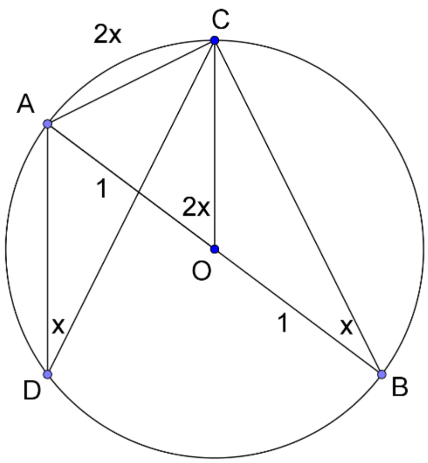
alors

le côté BC est plus long que le côté AB

**Proposition 5 :** Tout triangle inscrit dans un demi-cercle (les trois sommets sont dans un cercle dont deux aux extrémités d'un diamètre) est rectangle. L'angle droit est au sommet qui n'est pas aux extrémités du diamètre.

La proposition suivante est moins connue que les précédentes, nous donnons les idées principales de la démonstration.

**Proposition 6 :** Dans un cercle de rayon 1, si l'arc $\overset{\frown}{AC}$ mesure 2x (radians ou degrés), alors la mesure de la corde AC est 2 sin(x).




Le triangle ABC est inscrit dans le demi-cercle $\overset{\frown}{ACB}$ (AB étant un diamètre). Donc l'angle C est droit (proposition 5)

On a alors $\sin(x) = \sin(B) = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC}}{2}$

D'où $\overline{AC}$ = 2 sin(x)

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de la corde brisée

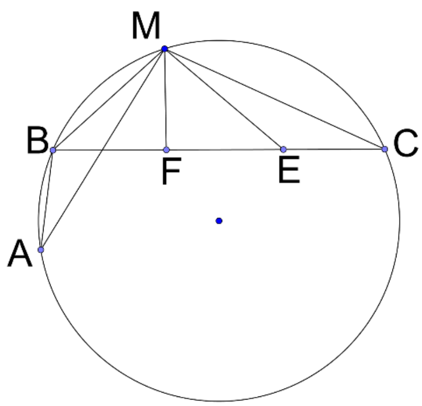
## Théorème de la corde brisée (Archimède) (figure page suivante)

M est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{ABC}$ et F est le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur BC. Alors, F est le milieu de la corde brisée ABC, autrement dit $\overline{AB} + \overline{BF} = \overline{CF}$

Plaçons E sur BC de telle sorte que $\overline{AB} = \overline{CE}$.

Nous complétons les triangles ABM et CEM.

Nous allons montrer que les triangles ABM et CEM sont congrus et en déduire que ME = MB, ce qui permettra de montrer que E est entre F et C (la construction est bonne) et que BF = EF, égalité dont découle le théorème de la corde brisée.




$\overline{AB} = \overline{CE}$ par construction

Les angles BAM et ECM sont congrus (ils interceptent le même arc $\overset{\frown}{BM}$) (proposition 2)

$\overline{AM} = \overline{CM}$ car $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{CM}$ (proposition 3)

Donc les triangles ABM et CEM sont congrus par CAC (proposition 1).

On en déduit d'abord que $\overline{BM} = \overline{EM}$ ce qui permet de voir que E est entre F et C (on a fait la bonne construction). En effet, si E = F, le triangle BME est rectangle avec $\overline{BM} = \overline{EM}$ ce qui contredit la proposition 4. Si E est entre B et F, le triangle BEM a un angle obtus et $\overline{BM} = \overline{EM}$ est encore en contradiction avec la proposition 4.

On montre maintenant que $\overline{BF} = \overline{FE}$. En effet, $\overline{BM} = \overline{EM}$ et MF est commun aux deux entraine que $\overline{BF} = \overline{FE}$ (théorème de Pythagore). Puisqu'on a aussi $\overline{AB} = \overline{CE}$ (par construction), on en déduit que $\overline{AB} + \overline{BF} = \overline{FE} + \overline{CE} \Leftrightarrow \overline{AB} + \overline{BF} = \overline{CF}$ ce qu'il fallait obtenir. Le théorème est démontré.

## Faisons maintenant un peu de trigonométrie.

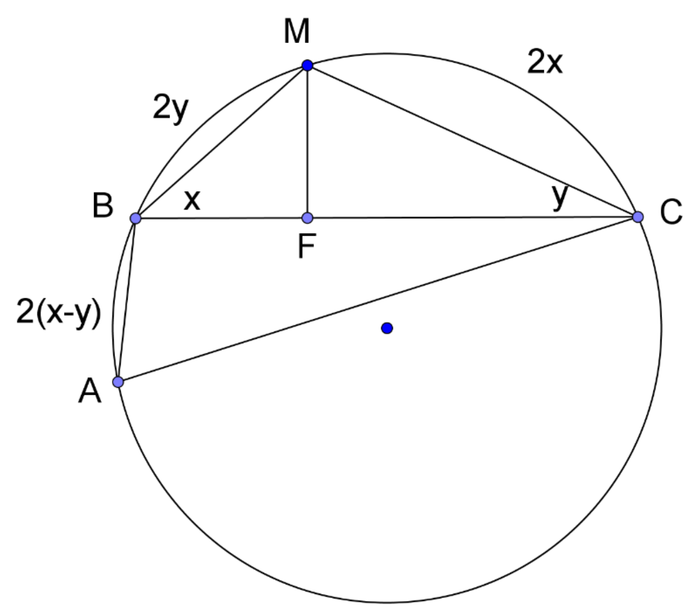
On travaille dans un cercle de rayon 1.

Par la proposition 6, on a :
$\overline{AB} = 2\sin(x-y)$, $\overline{BM} = 2\sin(y)$,
$\overline{CM} = 2\sin(x)$ et $\overline{BC} = 2\sin(x+y)$

De plus (triangle BMF) :

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{BM}} = \cos(x) \Leftrightarrow \overline{BF} = 2\sin(y)\cos(x)$$

et (triangle CMF)



$$\frac{\overline{CF}}{\overline{CM}} = \cos(y) \Leftrightarrow \overline{CF} = 2\sin(x)\cos(y)$$

Premièrement, le théorème de la corde brisée nous dit que $\overline{AB} + \overline{BF} = \overline{CF}$ , autrement dit 2 sin(x-y) + 2 sin(y) cos(x) = 2 sin(x) cos(y)

Ce qui est équivalent à sin(x-y) = sin(x) cos(y) − sin(y) cos(x)

*identité pour le sinus d'une différence*.

Par ailleurs, $\overline{BC} = \overline{BF} + \overline{FC}$ , autrement dit
2 sin(x+y) = 2 sin(y) cos(x) + 2 sin(x) cos(y), ce qui est équivalent à

sin(x+y) = sin(x) cos(y) + sin(y) cos(x)

*identité pour le sinus d'une somme*.

Note : Le théorème de la corde brisée est attribué à Archimède par les mathématiciens arables du moyen-âge. On ne le retrouve pas dans les textes d'Archimède qui existent encore aujourd'hui.

Paul Deguire, le 30 mai 2017