Les origines du calcul différentiel

Le calcul différentiel

Le calcul différentiel est une composante de ce qu'on appelle aujourd'hui le calcul différentiel et intégral. Deux mathématiciens de la seconde moitié du 17^{e} siècle sont reconnus pour être les fondateurs du calcul différentiel et intégral, Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz. Mais tant le calcul intégral que le calcul différentiel ont des origines plus anciennes. Le calcul intégral remonte à Archimède. Le calcul différentiel est plus récent et ses premiers développements importants ont suivi l'apparition de la géométrie analytique au début du 17^{e} siècle.

Pendant les premiers siècles du développement du calcul différentiel, la notion d'infiniment petit a été au cœur de tous les raisonnements. Le mathématicien Pierre de Fermat a été le premier à utiliser cette notion dans le calcul différentiel, sans utiliser toutefois l'expression infiniment petit.

En simplifiant un peu on peut dire que le calcul différentiel s'attaque à deux grandes familles de problèmes :

1. Trouver la pente de la tangente à une courbe en un point.
2. Trouver les extrema (maximum ou minimum) d'une expression mathématique.

Pierre de Fermat

Pierre de Fermat est un mathématicien amateur français du début du 17^{e} siècle. Tout amateur soit-il, il a été un précurseur dans plusieurs domaines, incluant la géométrie analytique, le calcul différentiel, le calcul intégral, la théorie des nombres et la théorie des probabilités. Sa notion d'adégalité est la première utilisation du concept d'infiniment petit en calcul différentiel.

Adégalité et calcul différentiel

Le premier exemple de recherche de maximum que propose Fermat est le suivant :

|____________________________|__________________________________|
A *C* *B*

On se donne un segment *AB* et on cherche où on doit placer le point *C* sur le segment *AB* pour que le produit des longueurs des segments obtenus, $\overline{AC} \times \overline{CB}$ soit maximal.

On peut voir ce produit comme étant l'aire d'un rectangle dont un des côtés est *AC* et un autre est *BC*. Où doit être placé le point *C* sur le segment *AB* pour que l'aire soit maximale ?

Pour faciliter l'écriture des calculs, on va supposer que la mesure de *AB* est *a*, celle de *AC* est *b* et celle de *CB* est $(a-b)$. On cherche donc à savoir où placer le point *C* pour que le produit $b \times (a-b)$ soit maximal.

Fermat savait, cela avait été observé avant lui par Johannes Kepler (au tournant du 17^{e} siècle) et par Nicolas Oresme (au 14^{e} siècle), qu'au voisinage d'un maximum une expression mathématique ne varie que très peu. Ainsi, si on suppose que le point *C* a été placé de manière à ce que le produit $b \times (a-b)$ soit maximal, et si *e* est très petit, alors le produit obtenu en déplaçant le point *C* d'une distance *e* sera très proche du produit $b \times (a-b)$.

Fermat pose alors $e \approx 0$, il dira que *e* est adégal à 0, ou encore que *e* est très petit. Aussi petit qu'on veut.

L'expression obtenue en multipliant les longueurs des segments obtenus en déplaçant légèrement le point *C*, d'une distance *e* est

$$(b+e)(a-(b+e)=(b+e)(a-b-e).$$

En se basant sur l'observation faite par Oresme et Kepler, Fermat peut écrire :

$$(b+e)(a-b-e) \approx b(a-b).$$

Les deux côtés du signe $\approx$ sont dits adégaux, leur différence est très petite. Donc,

$$ab-b^2-eb+ae-eb-e^2 \approx ab-b^2.$$

On simplifie en retranchant les termes communs pour obtenir : $ae-2be-e^2 \approx 0$.

Fermat poursuit sa simplification en divisant par *e* qui est commun à tous les termes, il obtient : $a-2b-e \approx 0$. Il conclut ensuite en posant $e=0$ pour obtenir $a-2b=0$.

Il sait alors que pour obtenir son maximum, le point *C* doit être au milieu du segment *AB* ($a = 2b$) et que le rectangle ayant un périmètre donné d'aire maximale est un carré. Son problème est résolu. Fermat donnera plusieurs autres exemples de son adégalité, tant pour rechercher des extrema que pour calculer la pente de la tangente à une courbe.

La suite des choses

Bien sûr, pour les mathématiciens modernes, la technique de Fermat manque de rigueur. On ne peut pas diviser par zéro, il apparaît donc problématique de diviser par *e* et ensuite de dire que e est égal à 0. En fait, derrière le raisonnement de Fermat on retrouve le concept de limite qui pour la première fois va être bien défini par Louis-Augustin Cauchy dans la première moitié du 19^{e} siècle. Puis vers la fin du 19^{e} siècle, notamment suite aux travaux de Karl Weierstrass, un langage mathématique va être mis sur pied pour traiter les questions de limites sans avoir à utiliser la notion un peu floue d'infiniment petits. Pendant deux siècles, de Fermat à Cauchy, les mathématiciens étaient conscients que cette notion n'était pas définie correctement, que son utilisation soulevait des problèmes de rigueur, mais les succès remarquables du calcul différentiel et intégral, tant en mathématiques que dans la physique Newtonienne, rendue possible justement par ce calcul, feront en sorte qu'ils continueront à utiliser les infiniment petits qui ainsi, avant Weierstrass. restaient indispensables.

Dans la seconde moitié du 20e siècle, Abraham Robinson va développer une nouvelle façon de faire l'analyse, l'analyse non-standard, dans laquelle la notion d'infiniment petits, bien définie, est totalement réhabilitée. Il est amusant de constater que la définition que Cauchy utilisait pour les infiniment petits est identique à celle de Robinson dans l'analyse non-standard.