L'irrationalité du nombre d'or.

L'histoire nous dit que les pythagoriciens ont découvert les nombres irrationnels. Elle ne nous dit pas quel a été le premier nombre dont on a montré l'irrationalité. Les deux principaux candidats sont $\sqrt{2}$ et le nombre d'or. La construction utilisée pour $\sqrt{2}$ est la plus connue et la connaissance de l'irrationalité de ce nombre est très ancienne. Le nombre d'or est également un bon candidat car la figure utilisée pour montrer son irrationalité, le pentagramme de Pythagore, était bien connue des pythagoriciens qui l'avaient étudiée en détail. Par ailleurs, les pythagoriciens avaient également étudié la proportion dorée (égale au nombre d'or), ils avaient donc tous les outils en main pour démontrer l'irrationalité du nombre d'or.

La proportion dorée

On dit que le segment AB est divisé suivant la proportion dorée, si un point C est placé entre A et B de telle manière que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$. Autrement dit, le rapport du tout sur la plus grande partie est égal au rapport de la plus grande partie sur la plus petite partie. La proportion dorée, autrement dit le nombre d'or, est égale à ce rapport. Un tel segment divisée suivant la proportion dorée est illustré ici-bas :

En posant $\overline{AB} = x$ et $\overline{AC} = 1$, on obtient $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$, une équation que l'on peut résoudre facilement et ainsi montrer que le nombre d'or est égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

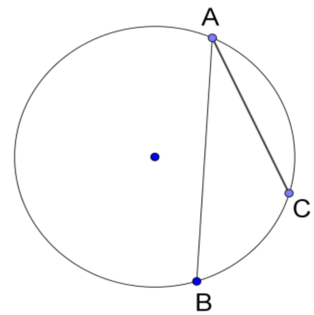
La descente infinie

La descente infinie est une technique de preuve qui permet de montrer qu'un problème n'a pas de solution entière ou encore qu'il n'existe pas de nombres entiers ayant une propriété donnée. On va l'utiliser ici pour montrer que le nombre d'or est irrationnel en montrant qu'il n'existe pas deux entiers dont le quotient soit égal au nombre d'or.

La descente infinie est basée sur un concept évident : il ne peut pas exister de suite infinie décroissante de nombres entiers positifs débutant avec un entier donné. Par exemple, une suite décroissante d'entiers positifs débutant avec l'entier n ne peut avoir plus que n termes. Ainsi, lorsque l'existence d'une solution à un problème donné conduit à une descente infinie, on sait qu'une telle solution ne peut pas exister. Pour montrer que le nombre d'or est irrationnel, on va montrer que l'existence d'un rationnel égal à la proportion dorée conduit à une descente infinie. Un tel rationnel ne peut donc pas exister et le nombre d'or est irrationnel.

Rappel géométrique

La mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l'arc qu'il intercepte.



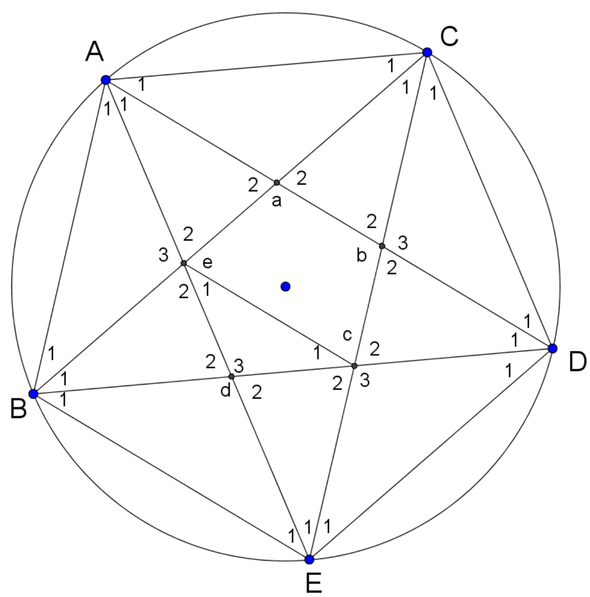
Ainsi, dans ce diagramme, la mesure de l'angle BAC est la moitié de la mesure de l'arc BC.

À l'aide de ces notions (proportion dorée, descente infinie et mesure des angles inscrits), on va maintenant pouvoir montrer l'irrationalité du nombre d'or.

Le nombre d'or est irrationnel

Construisons un pentagone régulier inscrit dans un cercle (4^{e} livre des Éléments d'Euclide, 11^{e} proposition). Traçons ses diagonales. Traçons également une des diagonales du petit pentagone central.

Cela nous donne la figure suivante :



Supposons que les côtés du pentagone AB, BE, ED, DC et CA mesurent 1 unités et que les diagonales AE, EC, CB, BD et DA mesurent x unités.

Les triangles ABd, ACb, CAe, CDc, DCa, DEd, EDb, EBe, Bec et BAa sont tous isoangles (deux angles de 72°) et donc isocèles, donc les segments Ad, Ab, Ce, Cc, Da, Dd, Eb, Ee, Bc et Ba sont tous de mesure 1 (congrus aux côtés du pentagone ABCD).

Ainsi les segments Ae, Aa, Ca, Cb, Db, Dc, Ec, Ed, Bd et Be mesurent tous x – 1 unités et les côtés du petit pentagone abedc mesurent tous x – 2(x - 1) = 2 - x unités.

Tous les angles marqués « 1 » situés aux sommets du pentagone ABEDC mesurent 36° car ils interceptent des arcs de 72°. En effet, les côtés égaux sous-tendent des arcs égaux, cinq arcs égaux faisant une circonférence (360°), chaque arc fait bien 72°.

Tous les arcs marqués « 3 » mesurent 108° car ils complètent des triangles isocèles dont les deux autres angles mesurent 36° chacun, où sont opposés par le sommet à de tels angles.

Tous les angles marqués « 2 » mesurent 72° car ils sont supplémentaires d'angles mesurant 108°.

Finalement les deux angles marqués « 1 » dans le petit pentagone intérieur mesurent aussi 36° car ils complètent un triangle isocèle ayant un angle connu de 108°.

Les triangles AEC et BAd étant semblables (deux angles de 72° et un angle de 36°), les proportions entre les grands côtés et les petits côtés sont égales. On a

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{Bd}} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}.$$

Cette équation est celle que nous avions obtenue avec la proportion dorée, cela nous indique que *x* est le nombre d'or (le rapport de la diagonale au côté est égal au nombre d'or).

Par ailleurs, le triangle Eec est isoangle, donc isocèle. On en déduit que $\overline{ec} = \overline{Ec} = x - 1$.

Par ailleurs on sait que $\dfrac{\overline{Ec}}{\overline{dc}} = \dfrac{x-1}{2-x} = \dfrac{x}{1}$, on peut donc en déduire que le rapport entre la longueur de la diagonale et la longueur du côté dans le petit pentagone est identique au rapport entre la longueur de la diagonale et la longueur du côté dans le pentagone initial.

Hypothèse : x est rationnel. Descente infinie

Supposons donc que x soit rationnel. C'est-à-dire qu'il existe deux entiers positifs m_1, n_1 tels que $x = \frac{m_1}{n_1}$. Cela revient à dire qu'il existe une petite longueur qui entre un nombre entier de fois dans la diagonale (m_1 fois) et un nombre entier de fois dans le côté (n_1 fois). Cette longueur est appelée partie aliquote. Cette partie aliquote entre aussi un nombre entier de fois dans la diagonale du petit pentagone de longueur $x-1$($m_1 - n_1$ fois) et un nombre entier de fois dans le côté du petit pentagone de longueur $2-x$ ($2n_1 - m_1$ fois).

Si on pose $m_2 = m_1 - n_1$ et $n_2 = 2n \; - m_{1,}$ on aura $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$.

On peut recommencer cette construction indéfiniment et obtenir une suite infinie de pentagones de plus en plus petits, emboités les uns dans les autres, satisfaisant à :

La partie aliquote entre un nombre entier de fois (m_k fois) dans la diagonale du k^e pentagone, et un nombre entier de fois (n_k fois) dans le côté du k^e pentagone.

On a alors une suite de nombres rationnels égaux dans lesquels les numérateurs et les dénominateurs sont strictement décroissant : $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_3}{n_3} = \frac{m_4}{n_4} = \ldots$

En n'observant que les numérateurs, on obtient une descente infinie $m_1 > m_2 > m_3 > m_4 > \ldots$

Puisqu'une telle descente infinie est impossible, notre hypothèse de départ (x est rationnel) ne peut être vraie (il n'existe pas deux entiers dont le quotient soit égal au nombre d'or).

Par conséquent, on a bien montré que le nombre d'or est irrationnel.

Conclusion

Si les grecs ont bien montrés l'irrationalité du nombre d'or en utilisant cette même construction bien connue des pythagoriciens, ils ont alors fait essentiellement la même chose que nous sauf peut-être à la conclusion. Une autre façon de conclure est de montrer que puisque le rapport entre le côté d'un pentagone et celui du pentagone précédent dans la construction est égal à $\frac{x-1}{x} < \frac{1}{2}$, à chaque fois que l'on répète la construction, la longueur du côté d'un nouveau pentagone est moins que la moitié de la longueur du côté dans le pentagone précédent. Cette longueur va éventuellement être aussi petite que l'on veut, éventuellement plus petite que la partie aliquote.

On aurait donc que la partie aliquote entre un nombre entier (positif) de fois dans le côté d’un pentagone qui est lui-même plus petit que la partie aliquote. Ceci est absurde et conduit à la même impossibilité : le nombre d’or ne peut être rationnel, il doit être irrationnel.

Observation

Dans notre construction, on retrouve deux types de triangles isocèles, les uns ayant deux angles de 72° et un angle de 36°, les autres avec un angle de 108° et deux angles de 36°. Dans tous ces triangles, le rapport entre la longueur du côté le plus long et la longueur du côté le plus petit est égal au nombre d’or. Ces triangles sont souvent appelés *triangles d’or*.