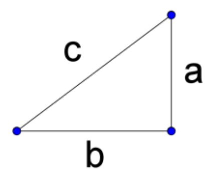
Les quadruplets pythagoriciens

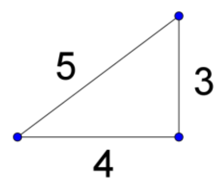
Les triplets pythagoriciens et le théorème de Pythagore.

Le théorème de Pythagore dit que dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés



Autrement dit, $a^2 + b^2 = c^2$.

Un triplet d'entiers naturels (a,b,c) est dit Pythagoricien lorsque $a^2 + b^2 = c^2$, en quel cas ces nombres correspondent à la mesure des côtés d'un triangle rectangle et ainsi illustrent le théorème de Pythagore. Par exemple (3,4,5) est un triplet pythagoricien illustré sur le triangle rectangle ci-dessous.



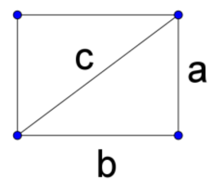
En fait les triplets pythagoriciens et des méthodes numériques pour en fabriquer sont connus depuis très longtemps. Une vieille tablette babylonienne, qui est plus de 1000 ans plus ancienne que Pythagore, contient une quinzaine de ces triplets arrangés de manière à représenter des triangles rectangles qui se transforment graduellement en partant avec un triangle à peu près isocèle et en terminant avec un triangle dont les angles aigus mesurent environ 30° et 60°. Les mathématiciens de l'antiquité avaient donc une bonne connaissance des triplets pythagoriciens et du théorème de Pythagore il y a près de 4000 ans.

Généralisation du théorème de Pythagore

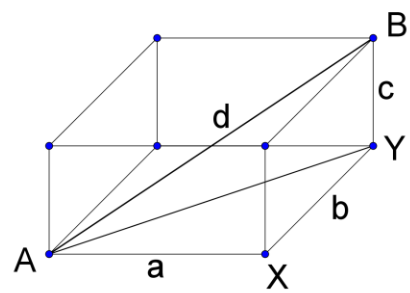
Le théorème de Pythagore est utile notamment pour calculer la distance entre deux points dans le plan. Le calcul de la distance entre deux points dans l'espace à trois dimensions ou dans des espaces abstraits de dimension supérieure généralise cette application du théorème de Pythagore. On perd cependant l'aspect géométrique du triangle rectangle et de son hypoténuse.

On peut reformuler le théorème de manière à en préserver la saveur géométrique même dans les dimensions supérieures. Cette formulation a été utilisée en Inde quelques siècles avant Jésus-Christ.

Dans un rectangle, le carré de la diagonale est égal à la somme des carrés des deux côtés du rectangle (largeur et hauteur).



On peut illustrer la généralisation du théorème en dimension 3 de la manière suivante.



Le carré de la grande diagonale AB d'un parallélépipède rectangle est égal à la somme des carrés des trois côtés du parallélépipède (largeur, profondeur, hauteur).

Autrement dit $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

On montre facilement ce résultat en appliquant deux fois le théorème de Pythagore.

Premièrement au triangle AXY : $\overline{AY^2} = a^2 + b^2$

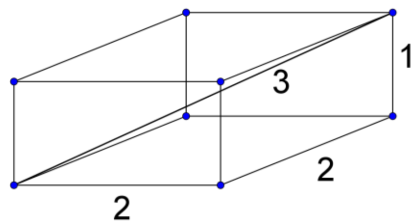
Deuxièmement au triangle AYB : $\overline{AB^2} = \overline{AY}^2 + c^2$, ou encore $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

On pourrait généraliser ce résultat aux dimensions supérieures sans problème. Il faut juste s'entendre pour un langage pour la généralisation de parallélépipède rectangle (un hyper-rectangle?). Si vous voyez bien le passage de la dimension 2 à la dimension 3 vous pouvez sans problème passer aux dimensions supérieures.

Les quadruplets pythagoriciens

Maintenant qu'on a une généralisation en dimension trois du théorème de Pythagore, on peut se demander s'il existe des quadruplets pythagoriciens, soit des quadruplets (a,b,c,d) d'entiers relatifs tels que $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

En voici un :



On a bien $3^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2$, donc (1,2,2,3) est un quadruplet pythagoricien.

Un exemple étant trouvé, y en-a-t-il d'autres? Existe-t-il une formule qui permette d'en trouver à volonté?

La réponse aux deux questions est oui et elle est basée sur les formules déjà connues pour les triplets pythagoriciens.

Soit *p, q, r* des entiers positifs, alors dès que $p^2 + q^2 - r^2 > 0$, on a :

Si $a = p^2 + q^2 - r^2$, $b = 2pr$, $c = 2qr$ et $d = p^2 + q^2 + r^2$, alors (a,b,c,d) est un quadruplet pythagoricien. Un simple calcul nous permet de vérifier que $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Le tableau suivant nous donne quelques exemples pour de petites valeurs de *p, q, r*.

p	q	r		a	b	c	d
1	1	1		1	2	2	3
2	1	1		4	4	2	6
2	2	1		7	4	4	9
3	1	1		9	6	2	11
3	2	1		12	6	4	14
3	2	2		9	12	8	17
3	3	1		17	6	6	19
3	3	2		14	12	12	22

Il faut noter que l'utilisation de triplets (*p, q, r*) entiers ne donne pas tous les quadruplets pythagoriciens (*a*, *b*, *c*, *d*). Il faut parfois prendre des triplets de la forme $\left(\frac{p}{\sqrt{n}}, \frac{q}{\sqrt{n}}, \frac{r}{\sqrt{n}}\right)$ où *n* n'est pas un carré parfait.

Par exemple, le triplet $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nous donne le quadruplet pythagoricien (6, 3. 2. 7) qui ne peut pas être obtenu avec *p, q, r* entiers.

De même le triplet $\left(\frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{5}{\sqrt{5}}\right)$ nous donne le quadruplet pythagoricien (11, 16, 8, 21) qui lui non plus ne s'obtient pas avec *p, q* et *r* entiers.

Remarquez que certains quadruplets peuvent être obtenus de différentes manières, à l'aide de triplets distincts, parfois en permutant les valeurs *a*, *b*, *c*, *d*.

Quadruplets primitifs

Un quadruplet pythagoricien sera dit primitif si au plus deux de ses nombres ont un facteur commun. On peut vérifier que tous les quadruplets pythagoriciens sont ou bien primitifs ou bien un multiple d'un quadruplet primitif. On peut aussi montrer que si un quadruplet pythagoricien n'est pas obtenu avec un triplet (*p, q, r*) de nombres entiers, certains de ses multiples le seront. Par exemple le triplet (3, 2, 1) donne le quadruplet pythagoricien (12, 6, 4, 14) qui est un multiple du quadruplet primitif (6, 3, 2, 7) qui lui ne peut être obtenu par un triplet de nombres entiers. Lorsqu'un quadruplet est un multiple d'un autre, les parallélépipèdes associés ont la même forme, ce sont des parallélépipèdes semblables, dans le même sens que triangles semblables. Par exemple le parallélépipède dont les dimensions sont 2, 3 et 6 respectivement et dont la grande diagonale est de longueur 7 est semblable au parallélépipède rectangle dont les dimensions sont 4, 6 et 12 respectivement et dont la grande diagonale est de longueur 14. Il suffit donc d'étudier les quadruplets primitifs.

On peut montrer, simplement avec des arguments de parité élémentaires, que dans un quadruplet pythagoricien primitif, *d* sera toujours un nombre impair et qu'exactement un des trois autres nombres du quadruplet sera aussi impair. Cette observation nous permet de donner une manière systématique d'obtenir tous les quadruplets pythagoriciens primitifs.

Pour simplifier supposons que *a* soit toujours impair, en quel cas *b* et *c* seront pairs. On débute avec les paires (*d, a*) de nombres impairs avec *d* > *a*. On procède par ordre croissant de *d*, commençant avec *d* = 3, et pour chaque *d* fixé, on procède par ordre croissant de *a*. Pour chaque paire (*a, d*) on cherche toutes les paires de nombres pairs (*b, c*) telles que $d^2 - a^2 = b^2 + c^2$. Le tableau suivant montre les résultats pour *d* inférieur à 10.

paire (*d, a*)	**paire (*b, c*)**	**quadruplet pythagoricien (*a, b, c, d*)**
(3, 1)	(2, 2)	(1, 2, 2, 3)
(5 ,1)	aucune	
(5, 3)	aucune	
(7, 1)	aucune	
(7, 3)	(6, 2)	(3, 2, 6, 7)
(7, 5)	aucune	
(9, 1)	(8, 4)	(1, 4, 8, 9)
(9,3)	aucune	
(9, 5)	aucune	
(9, 7)	(4, 4)	(7, 4, 4, 9)

Préparé par Paul Deguire.