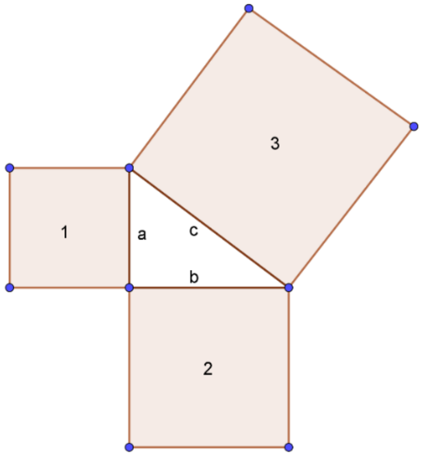
# Le théorème de Pythagore et la quadrature des lunules




Le **théorème de Pythagore** dit que si les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent respectivement a et b unités et si l'hypoténuse mesure c unités alors :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

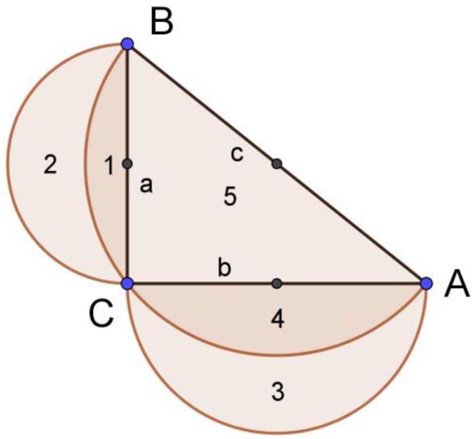
Si (1) représente l'aire du carré de côté a, (2) représente l'aire du carré de côté b et (3) représente l'aire du carré de côté c, alors le théorème de Pythagore dit simplement que (1) + (2) = (3).

(*La somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit du triangle est égale à l'aire du carré construit sur son hypoténuse*).

Que se passe-t-il si on remplace les carrés construits sur les côtés du triangle par d'autres figures?
(*Sous réserve qu'elles soient semblables, trois triangles équilatéraux, trois demi-disques, trois parallélogrammes semblables, …).*

Une généralisation du théorème de Pythagore attribuée à Euclide (proposition 31, livre 6 des Éléments) dit que le théorème tient toujours dans ce cas. On va le démontrer dans le cas du demi-disque et utiliser ce résultat pour faire la quadrature d'une paire de lunules (une lunule est la figure incluse entre deux arcs de cercles non concentriques et de rayons distincts).

Rappel : Faire la quadrature d'une région plane consiste à construire un carré qui a la même aire que cette région. Les grecs savaient, c'est démontré clairement dans les Élément d'Euclide, qu'on pouvait faire la quadrature des polygones et en particulier des triangles. Ainsi si on montre que la région formée des deux lunules a la même aire qu'un triangle, on peut en faire la quadrature. Hippocrate de Chios (5$^{e}$ siècle avant Jésus Christ) a fait la quadrature de lunules diverses. Ce sont les premières figures courbes dont on a fait la quadrature et cela rendait plausible aux yeux des grecs la possibilité de faire un jour la quadrature du cercle. Nous savons depuis le 19$^{e}$ siècle que c'est impossible avec la règle et le compas.




Le triangle ABC est rectangle.

On sait que $a^2 + b^2 = c^2$.

On construit un demi-disque sur chacun des côtés du triangle, ces demi-disques ont des aires respectives égales à $\frac{\pi a^2}{8}$, $\frac{\pi b^2}{8}$ et $\frac{\pi c^2}{8}$.

Par le théorème de Pythagore, on a bien que $\frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} = \frac{\pi c^2}{8}$, ce qui montre la généralisation du théorème dans le cas des demi-disques.

Si (1), (2), (3), (4) et (5) représentent respectivement les aires des régions distinctes 1, 2, 3, 4 et 5 de la figure, on a que l'aire du demi-disque construit sur le côté BC est égale à (1) + (2), l'aire du demi-disque construit sur le côté AC est égale à (3) + (4) et l'aire du demi-disque construit sur l'hypoténuse AB est égale à (1) + (4) + (5).
(2) + (3) représente l'aire de la région formée par les lunules 2 et 3. (5) représente l'aire du triangle ABC, la région 5.

On a montré que ((1) + (2)) + ((3) + (4)) = ((1) + (4) + (5)).

On en déduit que (2) + (3) = (5). L'aire de la région formée par les deux lunules est égale à celle du triangle, on peut faire la quadrature de cette région.