Approximation des racines carrées : un peu d'histoire

La méthode babylonienne

En sexagésimal, les babyloniens utilisaient souvent l'approximation suivante : $\sqrt{2} = 1 + \frac{25}{60}$. C'est-à-dire $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$.

Sur une tablette qui date de près de 4000 ans, on voit un carré avec sur sa diagonale le nombre sexagésimal $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$.

Il s'agit d'une bien meilleure approximation de $\sqrt{2}$, l'erreur étant plus petite qu'un millionième, un exploit remarquable pour l'époque. Les babyloniens savaient donc approximer avec précision les racines carrées. C'étaient important pour eux car ils connaissaient la formule des racines des équations quadratiques qui demande de savoir extraire les racines carrées.

Voici la méthode qu'ils utilisaient :

Approximation de $\sqrt{n}$:

- On débute avec une première approximation a_1. On définit $b_1 = \frac{n}{a_1}$.
- On définit ensuite, par récurrence, $a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$ et $b_{k+1} = \frac{n}{a_{k+1}}$ pour $k \geq 1$.
- On observe que si a_k est une approximation par défaut, b_k sera une approximation par excès, et vice-versa. Puisque a_{k+1} est la moyenne des deux approximations précédentes, une par défaut et une par excès, c'est une bien meilleure approximation que a_k et la convergence est très rapide.

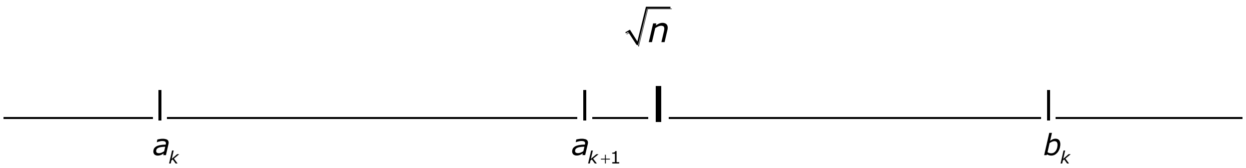
Voyons voir l'approximation de $\sqrt{2}$ en posant comme point de départ $a_1 = 1$.

On aura donc $b_1 = \frac{2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$. En poursuivant, on a $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{3}{2}$ et $b_2 = \frac{2}{a_2} = \frac{4}{3}$.

Poursuivant toujours, $a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{17}{12}$ et $b_3 = \frac{2}{a_3} = \frac{24}{17}$. On observe au passage que a_3 est l'approximation habituelle utilisée par les babyloniens pour $\sqrt{2}$.

Poursuivant toujours, $a_4 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{577}{408}$. Si on écrit cette fraction en sexagésimal, en tronquant à la troisième sexagésimale, on obtient précisément l'approximation $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ qui apparaît sur la tablette babylonienne mentionnée plus haut.

Le diagramme ci-dessous illustre bien l'augmentation rapide de précision en passant de a_k à a_{k+1} :



Rafael Bombelli, Italie 16e siècle

Rafael Bombelli est un algébriste italien important de la renaissance. Il est bien connu pour avoir été le premier à utiliser le calcul avec des nombres complexes lorsqu'il voulait simplifier les racines des équations de troisième degré qui prenaient parfois une forme très compliquée suite à l'utilisation des formules de Cardano-Tartaglia-del Ferro.

Bombelli a également proposé une manière d'approximer les racines carrées en s'appuyant sur la formule du carré d'un binôme.

Supposons qu'on veuille approximer $\sqrt{n}$.

Si on écrit $n = (a + r)^2$ avec a entier et r positif et inférieur à 1, on aura $n = (a^2 + 2ar + r^2)$ et donc $r = \dfrac{n - a^2}{r + 2a}$. En remplaçant r par sa valeur dans cette fraction et en répétant l'opération, on obtient une fraction continue qui approxime r. Plus simplement, on peut définir les valeurs successives de r en utilisant la formule de récurrence suivante : $r_0 = 0$ et pour $k \geq 1$, $r_{k+1} = \dfrac{n - a^2}{r_k + 2a}$, ce qui nous permet de trouver les approximations successives $\sqrt{n} = a + r_k, k \geq 1$.

Prenons par exemple n=2. Ainsi on aura a =1. On calcule maintenant les r_k avec la formule de récurrence donnée ci-haut. Cela nous donne le tableau suivant :

k	r_k	approximation	erreur
0	0	1	4.14E-01
1	1/2	3/2	8.58E-02
2	2/5	7/5	1.42E-02
3	5/12	17/12	2.45E-03
4	12/29	41/29	4.58E-04
5	29/70	99/70	7.22E-05
6	70/169	239/169	1.24E-05
7	169/408	577/408	2.12E-06
Pour fins de comparaison		$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$	6.00E-07

On retrouve les termes de la méthode babylonienne, plus rapide, imbriqués dans la suite des termes de la méthode de Bombelli.

La méthode de Newton-Raphson

Isaac Newton et Joseph Raphson étaient des mathématiciens anglais du 17e siècle. Ils ont tous deux utilisés une méthode algébrique d'approximations successives pour trouver les racines d'un polynôme. C'est Thomas Simpson, un mathématicien anglais du 18e siècle qui le premier utilisa la notion de dérivée pour étendre cette méthode aux équations non polynomiales. La méthode est utilisée pour trouver les racines de l'équation $f(x) = 0$ où f est une fonction différentiable.

Pour bien fonctionner, la première approximation choisie doit être proche de la racine cherchée et la dérivée de f ne doit pas s'annuler aux approximations successives de la racine.

L'idée est simple, si on a une approximation x_k de la racine cherchée, on connait alors le point $A = (x_k, f(x_k))$ sur le graphe de f et on connait la pente de la tangente au graphe au point A. Il est alors facile de trouver l'intersection entre cette tangente et l'axe des x, qu'on nommera x_{k+1} et qui si tout va bien fournira une bien meilleure approximation de la racine que x_k.

Le tout s'exprime par une formule de récurrence qui exprime x_{k+1} en fonction de x_k :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Par exemple, si on cherche la racine de 2, on écrira $f(x) = x^2 - 2$, on aura alors $f'(x) = 2x$. En prenant $x_1 = 1$ comme première approximation, on obtient la suite suivante d'approximations :

n	approximation	erreur
1	1	4.14E-01
2	3/2	8.58E-02
3	17/12	2.45E-03
4	577/408	2.12E-06

Il est assez surprenant de constater que la méthode de Newton-Raphson reproduit exactement les résultats de la méthode babylonienne. Il s'agit quand-même d'une technique bien plus importante puisqu'elle n'est pas limitée à la recherche des racines carrées.

Finalement, la convergence de la méthode de Newton-Raphson est extrêmement rapide, on dit qu'elle est quadratique localement ce qui signifie grossièrement qu'à chaque terme, le nombre de décimales correctes double *asymptotiquement*.

Erratum

OUPS! Dans la vidéo lorsque nous mentionnons l'approximation remarquable $\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ obtenue par les babyloniens, nous commettons un grossier lapsus. Au lieu de dire « 10 sur 60 au cube » nous disons « 10 sur 3600 au carré ». Ceux qui sont attentifs auront bien remarqué l'erreur.

Préparé par Paul Deguire.