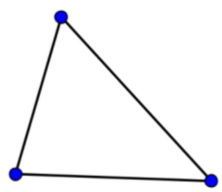
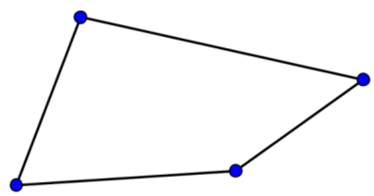
Les solides de Platon

Préliminaires : les polygones dans le plan.

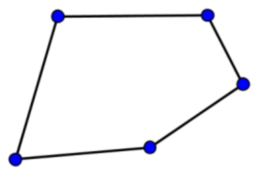
Dans le plan, un polygone est une figure fermée délimitée par des segments de droite. Les polygones sont caractérisés par leur nombre de côtés. Ainsi un triangle possède trois côtés, un quadrilatère en possède quatre et un pentagone en possède cinq.



triangle



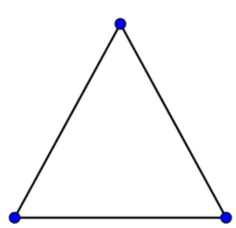
quadrilatère



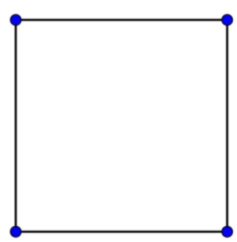
pentagone

Un polygone à n côtés possède aussi n sommets et n angles.

Un polygone est dit ***régulier*** si tous ses côtés sont de la même longueur et tous ses angles ont la même mesure. Les exemples les plus connus sont les triangles équilatéraux et les carrés.



triangle équilatéral

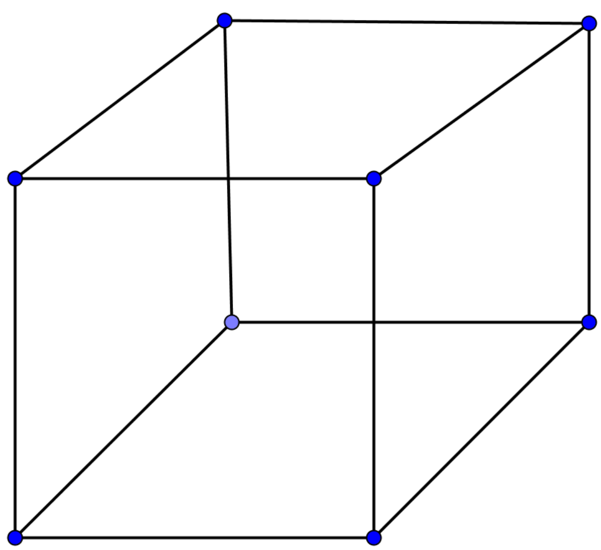


carré

Les solides dans l’espace

Une figure fermée à trois dimensions est appelée un solide. La généralisation du polygone à l’espace à trois dimensions est le polyèdre. Un polyèdre est un solide délimité par des figures polygonales, chacune d’elle est appelée une face. Par exemple un cube est délimité par des faces carrées.

Un polyèdre est dit régulier lorsque toutes ses faces sont des polygones réguliers identiques et lorsque la situation est la même à chaque sommet, c’est-à-dire que le nombre de polygones identiques se rencontrant à chaque sommet est le même. Un cube est un polyèdre régulier car ses faces sont des carrés identiques et trois d’entre eux se rencontrent à chaque sommet. Les polyèdres réguliers sont parfois appelés solides parfaits ou encore solides de Platon. Les solides sont dits parfaits à cause de leur très jolie symétrie. On les appelle solides de Platon car dans sa description du monde, Platon utilisait ces solides parfaits pour représenter les principaux éléments à la base de sa cosmologie (notamment l’air, le feu, la terre et l’eau). Quelques mathématiciens ont travaillé à l’École de Platon sur les solides parfaits. Euclide a repris et peut être complété leurs travaux dans le 13^{e} livre de ses Éléments.



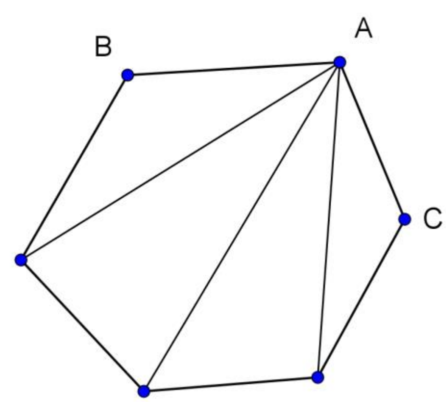
cube

Le cube est le plus connu des polyèdres réguliers. Comme l'illustration le montre, le cube est un solide délimité par six faces (six carrés identiques), elles-mêmes délimitées par des arêtes (12 segments de droites de même longueur), à leurs tours délimitées par des sommets (8 points). À chaque sommet on voit qu'il y a trois carrés qui se rencontrent.

Il n'y a que 5 solides parfaits

Pour bien voir qu'il n'y a que cinq solides parfaits il faut observer attentivement ce qui se passe à chaque sommet. Nous savons qu'à chaque sommet nous avons la même situation. Supposions que la situation soit la suivante : à chaque sommet m polygones réguliers identiques à n côtés se rencontrent.

Nous allons calculer la somme des angles au sommet. Pour cela nous devons d'abord connaître la valeur des angles dans un polygone régulier ayant n côtés



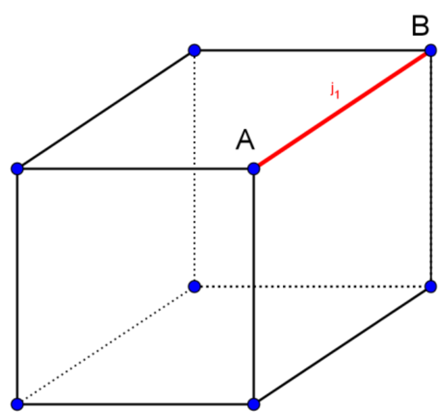
Supposons que nous tracions toutes les diagonales du polygone qui partent du sommet *A* (comme sur la figure). Combien y en a-t-il ? Si on trace tous les segments reliant *A* à un autre sommet, il y en a *n*-1. Deux de ces segments sont des côtés (*AB* et *AC* sur la figure). Il en reste donc *n*- 3 qui sont des diagonales. Ces *n*-3 diagonales partagent le polygone en *n*-2 triangles.

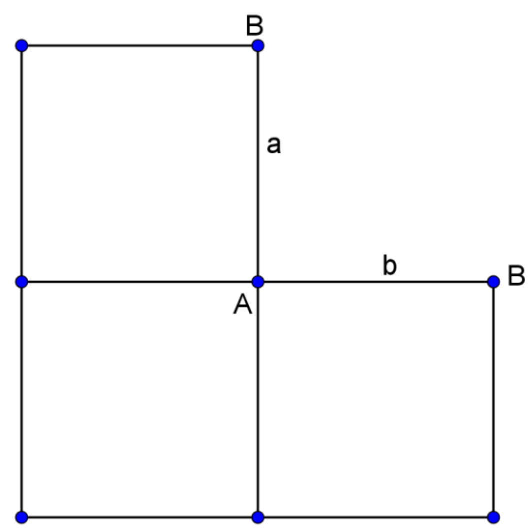
On voit facilement que la somme des angles du polygone ayant n côtés est donc égale à la somme des angles de ces *n*-2 triangles, soit $(n\text{-}2)\times\pi$.

Puisque dans un polygone régulier, tous les angles sont égaux, la valeur de chaque angle sera égale à $\left(\frac{n-2}{n}\right)\times\pi$.

Maintenant nous devons observer deux choses :

> <u>Première observation</u> : à chaque sommet il y a au moins trois polygones qui se rencontrent ($m>2$) sinon la figure ne serait pas fermée.
> <u>Deuxième observation</u> : La somme des angles à chaque sommet est inférieure à 2π. On peut voir cela si on réalise que si on découpe une arête à un sommet et qu'on aplatit la figure, on obtient une figure plane dont la somme des angles autour du sommet est inférieure à 2π.





Sur la figure on voit que si l'on découpe le long de l'arête rouge au sommet *A* (le segment *AB*) et que l'on aplatit la figure de gauche on obtient la figure plane de droite où il n'y a autour du point *A* que trois angles droits. Si on repliait cette figure pour reformer le coin du cube, les traits *a* et *b* seraient confondus et reformeraient le segment *AB*.

C'est toujours cette situation qui se produit, la somme des angles au sommet d'un polyèdre est ainsi toujours inférieure à 2π.

L’inéquation des angles

Pour chaque polyèdre pour lesquels *m* polygones à *n* côtés se rencontrent à chaque sommet, la somme des angles à chaque sommet satisfait à l’inéquation suivante (*m* fois la valeur d’un angle est inférieur à 2π) :

$$m \times \left(\frac{n-2}{n}\right) \times \pi < 2\pi$$

Ainsi, $mn - 2m < 2n$

En mettant les *n* à gauche et en ajoutant 4 de chaque côté on obtient :

$$mn - 2m - 2n + 4 < 4$$

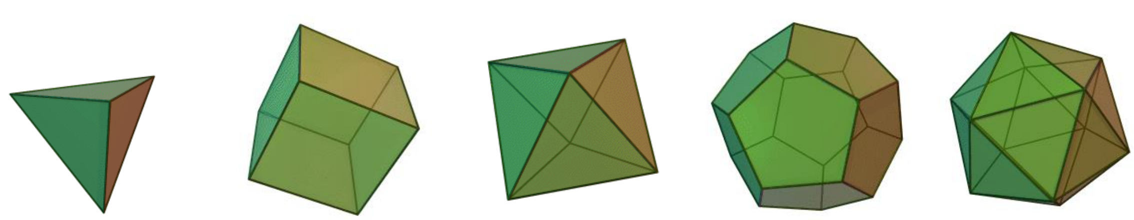
Et donc $(m-2)(n-2) < 4$.

Il est facile de voir quelles sont les solutions possibles de cette dernière inéquation. En aucun cas *n* ou *m* ne peut être plus grand ou égal à 6 (le membre de gauche serait supérieur à 4) et *m* et *n* ne peuvent être supérieur à trois simultanément (le membre de gauche serait supérieur à 4).

Les seules solutions possibles se retrouvent dans ce tableau

n	*m*	nombre de faces	situation à chaque sommet	polyèdre
3	3	4 (triangles)	3 triangles	tétraèdre
4	3	6 (carrés)	3 carrés	cube ou hexaèdre
3	4	8 (triangles)	4 triangles	octaèdre
5	3	12 (pentagones)	3 pentagones	dodécaèdre
3	5	20 (triangles)	5 triangles	icosaèdre

Les cinq solutions existent bel et bien, elles sont représentées dans la figure suivante :



La relation d’Euler

En terminant, voici une jolie relation énoncée par Léonard Euler (et possiblement René Descartes avant lui) permettant de relier le nombre de faces, d’arêtes et de sommets dans un polyèdre convexe (et donc dans les polyèdres réguliers en particulier)

S = nombre de sommets

A = nombre d’arêtes

F = nombre de faces

$$\boldsymbol{S + F - A = 2}$$

polyèdre	nombre de faces : F	nombre d’arêtes : A	nombre de sommets : S	$S+F-A$
tétraèdre	4	6	4	2
cube	6	12	8	2
octaèdre	8	12	6	2
dodécaèdre	12	30	20	2
icosaèdre	20	30	12	2

Il est amusant de noter que si l’on partait de cette formule (qu’il faudrait d’abord prouver) on pourrait donner une nouvelle preuve qu’il n’y a que 5 solides réguliers.